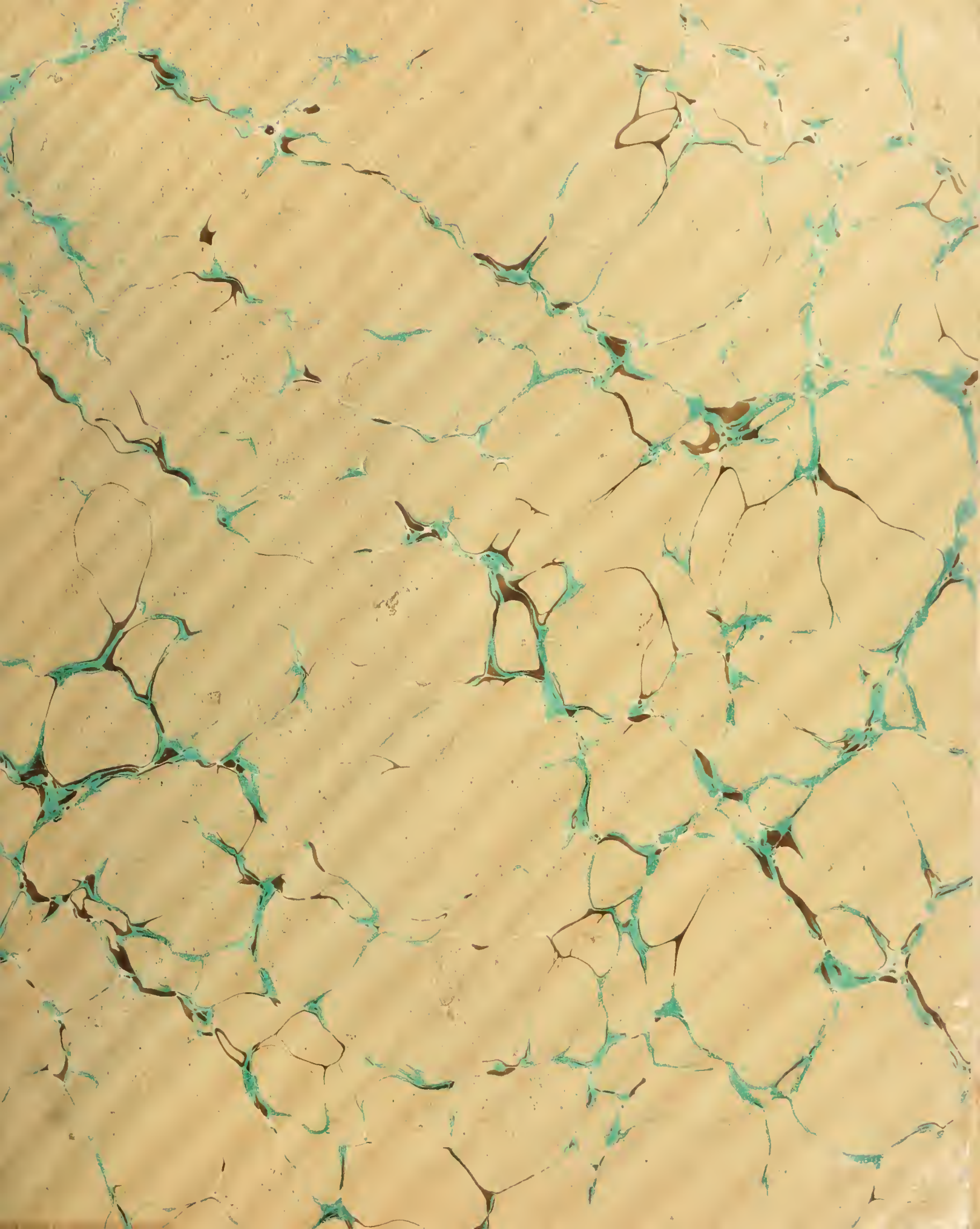


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3journaldemat07liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1881.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1881

(Tous droits réservés.)

Sér. 3
t. 1

2080 e

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Hoené Wronski;

PAR M. ÉMILE WEST.

INTRODUCTION.

Énumération des diverses méthodes. — Dans ces dernières années, les travaux mathématiques de Hoené Wronski ont été cités plusieurs fois sans que personne se soit arrêté aux méthodes générales proposées par

(1) Wronski (Hoené), né à Posen en 1778, est mort à Neuilly le 9 août 1853. A l'âge de seize ans, il était officier d'artillerie sous les ordres de Kosciusko. Fait prisonnier par les Russes à la bataille de Maciéiowicz, le 10 octobre 1794, il accepta dans leur armée le grade de lieutenant-colonel, dont il se démit en 1797, pour s'adonner exclusivement à l'étude de la Philosophie et des Sciences mathématiques, d'abord pendant deux années en Allemagne, puis en France jusqu'à la fin de ses jours. (*Note de la Rédaction.*)

ce géomètre. Elles nous ont cependant paru éminemment pratiques et très simples dans leurs principes chaque fois que nous avons eu occasion de les examiner ou d'en faire des applications.

Les Ouvrages de Wronski sont très rares et la lecture en est difficile au premier abord; aussi nous espérons que l'on nous saura gré de présenter les méthodes dont nous parlons avec les notations ordinairement usitées et accompagnées d'exemples suffisants pour les rendre facilement intelligibles. Nous nous adressons surtout aux personnes qui font un fréquent usage des Mathématiques et que leurs travaux conduisent à des calculs élevés.

Il nous semble utile de signaler d'abord les différentes méthodes de Wronski [1].

Nous désignons par le mot *méthode* l'application systématique d'une loi fondamentale déterminée.

En premier lieu, nous citerons pour mémoire une méthode générale concernant la théorie des nombres. Le principe fondamental a été démontré par M. Hanegraeff, *Note sur l'équation de congruence*

$$x^m \equiv r \pmod{p} \quad [2],$$

et par A. Bukaty, *Déduction et démonstration de trois lois primordiales de la congruence des nombres* [3].

Cette méthode a été développée au commencement du Tome I de la *Réforme du savoir humain* (1847).

Les autres méthodes ont exclusivement rapport à l'expression des fonctions proprement dites. Ce sont : la *méthode secondaire*, méthode pratique et universelle (c'est-à-dire *technique*, pour employer le langage de Wronski); elle permet de résoudre toute espèce d'équations et d'intégrer les équations aux différences ou aux différentielles totales ou partielles. Le nom de *méthode secondaire* indique que cette méthode doit prêter son concours à une seconde, dite *méthode suprême*. Celle-ci est fondamentale; elle est à la fois théorique et technique.

---

(1) Aucune de ces méthodes n'a rapport à la Géométrie.

(2) Gauthier-Villars, 1860.

(3) Amiot, 1873.

D'après Wronski, on peut en déduire toutes les lois des Mathématiques.

Ces deux méthodes se subdivisent en *méthodes élémentaires* et *méthodes systématiques*, suivant que l'on ne distingue spécialement aucune des diverses parties qui composent les équations ou que l'on distingue systématiquement ces parties.

Il existe encore deux méthodes générales : l'une est basée sur l'*interpolation ;* elle a pour but de résoudre ou d'intégrer une équation d'un genre quelconque quand les dérivées ou les différences successives des fonctions proposées sont trop pénibles à calculer. On remplace ces éléments des fonctions par un nombre suffisant de valeurs des fonctions proposées correspondant à des valeurs déterminées des variables indépendantes.

L'autre, la *méthode d'exhaustion,* est, comme son nom l'indique, une méthode générale d'approximation. Son caractère consiste en ce que les accroissements successifs des différents termes qui déterminent la fonction problématique ne sont liés par aucune loi, et qu'ils doivent être calculés directement et non par des tâtonnements. Cette méthode peut s'appliquer encore à tous les problèmes, et l'on n'a besoin que de connaître les différentielles de la fonction proposée ; c'est surtout dans l'évaluation des intégrales qu'elle peut être employée avec succès.

Avant d'entreprendre l'examen des différentes méthodes, ou tout au moins des premières, nous devrions commencer par démontrer les deux lois fondamentales desquelles dérivent la méthode suprême et la méthode secondaire ; mais, pour ne pas entrer dans des considérations préliminaires qui nous entraîneraient trop loin, nous commencerons par la méthode secondaire élémentaire. Nous aurons ainsi l'avantage de donner une première idée de la méthode secondaire et de faciliter ensuite l'exposition de la méthode systématique.

Nous devons prévenir que cette méthode élémentaire, quoique permettant de résoudre ou d'intégrer tout genre d'équations, entraîne généralement à des complications que ne donne pas la méthode systématique ; parfois même elle peut devenir insuffisante, comme nous aurons occasion de le voir. Cependant la méthode élémentaire doit être préférée dans certains cas, ce qui arrive particulièrement quand il faut déterminer principalement les valeurs numériques de certaines quantités

Fonctions employées et notations. — Wronski a fait, dès le commencement du siècle, un usage très étendu des déterminants, qu'il désignait sous le nom de *sommes combinatoires* ou de *fonctions schin* (voir la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, 1812; *Philosophie de la Technie*, 1815, etc.).

Nous emploierons indifféremment les notations usitées

$$\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

ou

$$\text{Ⓓ}(a_1^1 . a_2^2 . a_3^3 . \dots . a_n^n).$$

La seconde notation est celle dont Wronski faisait usage, avec cette différence que la caractéristique Ⓓ du déterminant était remplacée par la lettre hébraïque schin, caractéristique de la somme combinatoire. Ces fonctions ne sont d'ailleurs que des expressions tabulaires de termes distincts et achevés, car elles n'indiquent pas certaines opérations particulières; elles ne sont pas l'expression de quelques fonctions indépendantes, telles que les logarithmes ou les sinus.

Indépendamment de ces sommes combinatoires, Wronski considérait d'autres sommes de même espèce, qu'il désignait sous le nom d'*agrégats;* nous en ferons également usage. On trouvera dans la *Philosophie de la Technie,* vers la formule (451), la relation qui existe entre les agrégats et les fonctions schin.

Les agrégats sont formés de termes de même signe qui dérivent les uns des autres d'après une loi déterminée, et cette loi porte ordinairement sur certains indices des éléments de ces sommes. On dénote ces fonctions par le terme général placé entre accolades et précédé de la caractéristique Agr, et par la loi des indices. Ainsi la fonction symétrique

$$\beta) \qquad a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_1a_2^2+a_2a_3^2+a_3a_1^2+a_1^2a_2+a_2^2a_3+a_3^2a_1+a_1a_2a_3$$

peut être représentée par l'agrégat suivant

$$(7) \qquad \mathrm{Agr}\left\{ a_1^{p_1} . a_2^{p_2} . a_3^{p_3} \right\}.$$

Les indices p_1, p_2, p_3 doivent être donnés par la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation indéterminée

$$(7)' \qquad p_1 + p_2 + p_3 = 3.$$

Wronski faisait encore un fréquent usage de certaines fonctions symétriques qu'il nommait *fonctions aleph*. Bien que ces fonctions puissent être exprimées par des fonctions symétriques plus simples, il convient de leur donner une notation spéciale, car elles entrent directement dans beaucoup d'expressions. On peut définir les fonctions aleph en disant qu'elles proviennent du développement de la puissance μ d'un polynôme de m termes ou éléments, dans lequel on remplacerait par l'unité les divers coefficients. Wronski les désigne par la lettre hébraïque aleph $\aleph$; il met entre crochets les éléments qui composent cette fonction et en exposant, avec parenthèses, le degré qui lui correspond.

Ainsi l'expression précédente (β) est une fonction aleph que l'on notera ainsi :

$$(\delta) \qquad \aleph\left[a_1 . a_2 . a_3\right]^{(3)}.$$

Quand on considère plusieurs fonctions aleph formées des mêmes éléments, on peut ne pas écrire ces éléments et n'indiquer que l'exposant ; de cette façon, la fonction précédente s'écrira

$$(\delta)' \qquad \aleph(3).$$

Ces fonctions se présentent souvent ; on les a autrefois rencontrées dans les séries récurrentes.

Les fonctions aleph jouissent de propriétés que nous ferons connaître dans la suite ; nous indiquerons seulement ici leur propriété fondamentale, qui est la suivante :

$$(\varepsilon) \qquad \aleph\left[N_\omega - n_p\right]^{(m)} - \aleph\left[N_\omega - n_q\right]^{(m)} = (n_q - n_p)\aleph\left[N_\omega\right]^{(m-1)}.$$

N_ω représente un nombre quelconque ω d'éléments dont n_p et n_q font partie, et $[N_\omega - n_p]$ représente tous ces éléments, sauf n_p; de même $[N_\omega - n_q]$ les représente tous, sauf n_q (voir *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, 1811).

De l'expression précédente on déduit celle-ci :

$$(\zeta)\qquad \left\{\begin{aligned} \aleph(m) = {} & \Sigma_1(\mu)\aleph(m-1) - \Sigma_2(\mu)\aleph(m-2) + \ldots \\ & + (-1)^{\mu-1}\Sigma_\mu(\mu)\aleph(m-\mu). \end{aligned}\right.$$

m est le degré de la fonction considérée, et μ le nombre des éléments qui entrent dans toutes ces fonctions aleph; $\Sigma_p(\mu)$ représente de plus la somme de tous les produits différents des μ éléments p à p. Le nombre m doit être ici plus grand que μ, ou tout au moins égal; autrement la fonction aleph qui aurait un exposant négatif devrait être considérée comme nulle, ainsi que nous allons le voir.

Si les éléments sont les racines de l'équation

$$(\eta)\qquad A_\mu x^\mu + A_{\mu-1}x^{\mu-1} + A_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

l'expression précédente s'écrit

$$(\theta)\ A_\mu\aleph(m) + A_{\mu-1}\aleph(m-1) + A_{\mu-2}\aleph(m-2) + \ldots + A_0\aleph(m-\mu) = 0.$$

Supposons $A_\mu = 0$, nous aurons pour les premières valeurs des fonctions aleph

$$(\theta)'\qquad \left\{\begin{aligned} & \aleph(0) = 1, \\ & -\aleph(1) = A_{\mu-1}, \\ & -\aleph(2) = A_{\mu-1}\aleph(1) + A_{\mu-2}, \\ & -\aleph(3) = A_{\mu-1}\aleph(2) + A_{\mu-2}\aleph(1) + A_{\mu-3}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

$$(\iota)\qquad \aleph(m) = \frac{\Theta(n_1^0 n_2^1 n_3^2 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-2} n_\mu^{m+\mu-1})}{\Theta(n_1^0 n_2^1 n_3^2 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-2} n_\mu^{\mu-1})}$$

On voit immédiatement que, pour $m = 0$, la fonction se réduit à

l'unité; si m a une valeur négative comprise entre -1 et $-(\mu-1)$, la fonction est nulle; au delà les valeurs négatives de m n'annulent généralement pas la fonction. Ainsi nous dirons que les fonctions aleph *négatives* sont nulles pour un exposant pris entre -1 et $-(\mu-1)$, en y comprenant ces limites.

M. Hanegraeff (*Méthode pour la résolution générale des équations par leur décomposition en facteurs*, Bruxelles, 1854) a indiqué la propriété suivante.

Soit l'équation

$$(\varkappa) \qquad F(x) = x^{\mu} - A_1 x^{\mu-1} + A_2 x^{\mu-2} - \ldots \mp A_{\mu-1} x \pm 1 = 0.$$

L'équation dont les racines ont des valeurs inverses de celles de la précédente est

$$(\varkappa)' \qquad f(x) = x^{\mu} - A_{\mu-1} x^{\mu-1} + A_{\mu-2} x^{\mu-2} - \ldots \mp A_1 x \pm 1 = 0.$$

Si l'on développe par la formule de Maclaurin l'inverse des premiers membres de ces équations, on aura

$$(\lambda) \qquad \frac{1}{f(x)} = \aleph(0) + x\aleph(1) + x^2\aleph(2) + x^3\aleph(3) + \ldots$$

et

$$(\lambda)' \qquad \frac{1}{F(x)} = \aleph'(0) + x\aleph'(1) + x^2\aleph'(2) + x^3\aleph'(3) + \ldots:$$

l'accent placé sur les fonctions aleph de la seconde égalité indique que les éléments qui les composent sont différents de ceux qui composent les fonctions aleph de la première égalité.

Le théorème en question revient aux expressions des coefficients généraux :

$$(\mu) \qquad \aleph(m) = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{d^m \frac{1}{f(x)}}{dx^m}\right]_{(x=0)},$$

$$(\mu)' \qquad \aleph'(m) = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{d^m \frac{1}{F(x)}}{dx^m}\right]_{(x=0)}.$$

Or $\aleph'(m)$ est une fonction aleph négative de $\aleph(m)$, ce qui donne la relation

$$(\nu) \qquad \aleph'(\mu) = \aleph[-(m+\mu)];$$

pour la première valeur, on a

$$(\nu)' \qquad \aleph'(0) = \aleph(-\mu) = (-1)^{\mu-1}.$$

Il est encore une autre espèce de fonctions dont nous devons parler; elles sont connues sous le nom de *facultés*. Ces fonctions s'introduisent nécessairement dans les calculs, car elles interviennent quand on considère les différences des quantités variables, de la même manière que les puissances ou les exponentielles quand on considère les différentielles.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable x; la faculté $\varphi(x)^{m|\xi}$ n'est autre que le produit

$$(\xi) \qquad \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\varphi(x+3\xi)\ldots\varphi[x+(m-1)\xi].$$

m est l'exposant de la faculté et ξ l'accroissement de la variable ; ces quantités m et ξ peuvent être constantes ou variables.

Les produits d'un nombre infini de facteurs ne doivent pas être confondus avec les facultés; ces dernières fonctions sont plus générales.

Vandermonde a le premier reconnu ces fonctions dans son *Mémoire sur les irrationnelles de différents ordres* (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772, I^e Partie, p. 489). Plus tard, Kramp, dans son *Analyse des réfractions astronomiques*, a fait une étude complète des facultés particulières nommées *factorielles*. Enfin Wronski a complété l'étude des facultés et a montré qu'elles pouvaient servir à représenter toute espèce de fonctions.

Les facultés, malgré leur importance, paraissent tombées dans l'oubli, quoique plusieurs géomètres aient reconnu leur utilité. Nous citerons à ce sujet un passage d'une Lettre d'Abel à Holmboe, qui fait connaître l'opinion de ces mathématiciens :

« .... *Theorie der analytischen Facultäten* (cet Ouvrage se trouve à la bibliothèque de Christiania; si tu ne l'as pas lu, il faut absolument que tu le

fasses ; c'est un Ouvrage supérieur à différents égards et surtout par rapport à la méthode....) ». (Lettre du 24 octobre 1826 ; *Œuvres complètes de N. H. Abel*, t. II, p. 270.)

Il conviendra, pour les factorielles que l'on rencontre constamment, d'adopter la notation des facultés ; la notation usitée aujourd'hui est d'ailleurs insuffisante. Le produit des m premiers nombres pourra donc s'écrire de la manière suivante :

$$(\xi)' \qquad 1.2.3\ldots m = 1^{m|1}.$$

L'avantage de cette notation s'appréciera facilement. Par exemple, si l'on avait à exprimer la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme de n termes, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, on aurait, en faisant usage des agrégats,

$$(o)' \quad (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = 1^{m|1}.\mathrm{Agr}\left\{\frac{a_1^{p_1}}{1^{p_1|1}}\frac{a_2^{p_2}}{1^{p_2|1}}\frac{a_3^{p_3}}{1^{p_3|1}}\ldots\frac{a_n^{p_n}}{1^{p_n|1}}\right\},$$

avec la condition

$$(o)' \qquad m = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n,$$

équation indéterminée qui doit être résolue en nombres entiers et positifs par rapport aux quantités $p_1, p_2, p_3, \ldots$, m étant supposé un nombre entier.

En prenant encore un exemple, on aurait, pour le développement de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$(\varpi) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots,$$

le terme général étant

$$(\varpi)' \qquad (-1)^n\,\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}x^{2n}.$$

Nous reviendrons plus loin sur l'usage que l'on peut faire des facultés et sur leurs propriétés.

Nous ne faisons également que mentionner les sinus d'ordres supé-

rieurs, dont nous verrons l'utilité dans la méthode secondaire. Pour les principales propriétés des sinus et leur introduction dans les calculs, nous renvoyons aux deux Mémoires de M. Yvon Villarceau insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXVI, séances des 13, 20 et 27 mai 1878, et t. XC, séances des 29 mars et 5 avril 1880).

Nous devons dire encore que nous noterons les dérivées partielles, comme on le fait souvent, en mettant entre parenthèses la dérivée que l'on considère. Par exemple, si $\varphi(y)$ représente une fonction de y et d'autres quantités, toutes fonctions de x ainsi que de y, nous écrirons la dérivée de la fonction proposée par rapport à y

$$(\rho) \qquad \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Mais, si l'on prenait la dérivée de $\varphi(y)$ par rapport à x, sur la variable y seulement, nous écririons

$$(\rho)' \qquad \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)\frac{dx}{dy}.$$

Autant que possible, nous citerons les passages des Ouvrages de Wronski se rapportant aux sujets que nous traiterons; autrement, nous donnerons les indications nécessaires pour que l'on puisse recourir à ces Ouvrages.

PREMIÈRE MÉTHODE.

MÉTHODE SECONDAIRE ÉLÉMENTAIRE.

Conditions générales de la méthode.

Expression fondamentale. — En nous plaçant à un point de vue particulier, nous dirons que le principe de cette méthode consiste dans l'usage général d'une formule dont celle de Taylor n'est qu'un cas particulier.

Euler en a donné une qui remplit cette condition pour la méthode élémentaire.

Soit

$$(1) \qquad \varphi(y) = 0$$

l'équation proposée qu'il s'agit de résoudre; y est l'inconnue, celle-ci pouvant être fonction d'une variable indépendante x (nous ne considérerons d'abord que les fonctions d'une seule variable indépendante). Soit de plus une quantité *quelconque* w; l'équation proposée est toujours satisfaite par une valeur de y donnée par l'expression

$$(2) \qquad y = w - \varphi(w)\frac{dw}{d\varphi(w)} - [\varphi(w)]^2 \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi(w)\,dw}{[d\varphi(w)]^2} - \ldots,$$

le terme général étant

$$(2)' \qquad -[\varphi(w)]^{\mu}\frac{\Theta\{d^2\varphi(w)\,d^3[\varphi(w)]^1\,d^4[\varphi(w)]^3\ldots d^{\mu}[\varphi(w)]^{\mu-1}\}\,d\varphi(w)}{1^{[1]}\,1^{2[1]}\,1^{3[1]}\ldots 1^{\mu[1]}\,[d\varphi(w)]^{1+2+3+\ldots+\mu}}.$$

Or, comme nous l'avons dit, puisque nous ne distinguons pas dans cette méthode élémentaire les diverses parties qui composent l'équation proposée, la forme de la fonction $\varphi(y)$ suffira pour désigner généralement le premier membre d'une équation d'un genre quelconque, algébrique ou transcendante, primitive ou différentielle.

Si, au lieu de l'inconnue y, nous voulons obtenir une fonction déterminée $F(y)$ de cette inconnue, nous substituerons à la formule d'Euler la formule suivante :

$$(3) \qquad F(x) = F(w) - \varphi(w)\frac{dF(w)}{d\varphi(w)} + [\varphi(w)]^2 \frac{\Theta[d\varphi(w)\,d^2F(w)]}{1^{[1]}\,1^{2[1]}[d\varphi(w)]^3} - \ldots,$$

le terme général étant

$$(3)' \qquad (-1)^{\mu}\frac{\Theta\{d\varphi(w)\,d^2[\varphi(w)]^2\,d^3[\varphi(w)]^3\ldots d^{\mu+1}[\varphi(w)]^{\mu-1}\,d^{\mu}F(w)\}}{1^{[1]}\,1^{2[1]}\,1^{3[1]}\ldots 1^{\mu[1]}[d\varphi(w)]^{1+2+\ldots+\mu}}.$$

Démonstration. — Il existe plusieurs démonstrations des expressions (2) et (3); nous n'avons pas à les exposer; nous indiquerons seulement ici, afin de ne pas nous répéter, la démonstration de Wronski (*Philosophie de la Technie*, Ire Section), parce qu'elle contient le prin-

cipe de toutes les autres et qu'elle fait connaître en même temps la signification de la quantité w.

Soit $F(y)$ une fonction donnée de la quantité y; considérons son développement par rapport aux puissances d'une autre fonction $\varphi(y)$ également donnée; nous aurons la série

$$(4) \qquad F(y) = A_0 + A_1[\varphi(y)] + A_2[\varphi(y)]^2 + A_3[\varphi(y)]^3 + \ldots.$$

Les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sont supposés indépendants de y et sont donnés par l'expression suivante, déterminée par une valeur particulière w, mais quelconque, de y :

$$(4)' \quad A_\mu = \Xi_\mu - \frac{\mu+1}{1}\Xi_{\mu+1}\varphi(w) + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}\Xi_{\mu+2}[\varphi(w)]^2 - \ldots,$$

en faisant, pour un indice quelconque ν,

$$(4)'' \qquad \Xi_\nu = \frac{(\mathfrak{D})\{d^1\varphi(w)\,d^2[\varphi(w)]^2\ldots d^{\nu-1}[\varphi(w)]^{\nu-1}d^\nu F(w)\}}{1^{|1}\,1^{2|1}\ldots 1^{\nu|1}\,[d\varphi(w)]^{1+2+\ldots+\nu}}.$$

Nous aurons occasion de démontrer ces formules plus loin; c'est pourquoi nous ne nous y arrêtons pas.

Ainsi, quelle que soit la valeur de w, le développement (4) subsiste toujours; par suite, les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ doivent rester les mêmes. Si donc w prend une valeur particulière u telle que l'on ait

$$(5) \qquad \varphi(u) = 0,$$

on aura aussi

$$A_\mu = \Xi'_\mu,$$

en désignant par un accent la valeur particulière que prend Ξ_μ pour $w = u$.

Faisons $\mu = 0$,

$$(5)' \qquad A_0 = \Xi'_0 = F(u);$$

d'après (5) et d'après (4') on aura également

$$(6) \qquad A_0 = \Xi_0 - \Xi_1\varphi(w) + \Xi_2[\varphi(w)]^2 - \Xi_3[\varphi(w)]^3 + \ldots.$$

Or, si φ est la fonction qui forme le premier membre de l'équation (1), u sera précisément l'inconnue y, et nous aurons

$$(6)' \qquad F(y) = \Xi_0 - \Xi_1 \varphi(\alpha) + \Xi_2 [\varphi(\alpha)]^2 - \Xi_3 [\varphi(\alpha)]^3 + \ldots;$$

les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \ldots$ sont identiques aux coefficients de l'expression (3).

On conçoit maintenant comment, en principe, l'expression (3), pour toute valeur de α, donne une solution de l'équation (1) d'un genre quelconque. Cependant cette expression (3) peut être convergente ou divergente, ce qui fait que l'on ne doit pas prendre α d'une manière tout à fait arbitraire; cette quantité doit, au contraire, être choisie la plus rapprochée possible de la quantité cherchée y, puisqu'il semble évident que l'expression (3) doit être d'autant plus convergente que la quantité α est plus près de zéro.

Remarque sur les quantités idéales et absurdes. — Avant d'étudier les conditions de convergence de l'expression (3), nous ferons une observation relative aux quantités qui indiquent des cas d'impossibilité.

Wronski distingue deux espèces de quantités *idéales*, les quantités infinies et les quantités imaginaires [1]. Les premières impliquent expressément l'idée de l'infini dans la considération de la *quantité* même; les quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ impliquent l'idée de l'infini dans la considération de la *qualité* même de la quantité, qualité qui constitue l'état positif ou négatif. Ces quantités sont possibles idéalement et non réellement.

De plus, il existe des quantités *absurdes* qui ne sont possibles ni réellement ni idéalement. Ainsi l'expression (4) sera impossible dans deux cas : 1° lorsque les coefficients donnés par (4)' seront des quantités idéales, c'est-à-dire imaginaires ou infinies; 2° lorsque les expressions (4)', (4)'' conduiront à de véritables absurdités.

---

[1] Pour plus de détails sur ce sujet, nous sommes obligé de renvoyer à l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques et à la Philosophie de la Technie*.

Dans le premier cas, le développement ne peut être exprimé que par des quantités infinies, et l'impossibilité n'existe que par rapport à des quantités réelles; ce développement n'est en défaut que si l'on envisage spécialement les quantités réelles.

Dans le deuxième cas, l'impossibilité est absolue. Si l'on trouve, par exemple, pour les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$, des quantités différentes à mesure que l'on change la valeur arbitraire ϖ attribuée à y, le développement est *absurde*. Pour fixer les idées, si l'on avait pour la fonction $\varphi(y)$ la valeur

$$(7) \qquad \varphi(y) = M_0 + M_1 y + M_2 y^2 + \ldots + M_n y^n,$$

$M_0, M_1, M_2, \ldots$ étant des constantes, on obtiendrait n valeurs différentes pour chaque coefficient A de (4). Si l'on prend pour ϖ une valeur qui annule le polynôme (7), on a

$$(7)' \qquad A_\mu = \frac{\Theta\{d\varphi(\varpi)\, d^2[\varphi(\varpi)]^2 \ldots d^\mu F(\varpi)\}}{1^{|1|}\, 1^{2|1} \ldots 1^{\mu|1}\, [d\varphi(\varpi)]^{1+2+\ldots+\mu}},$$

et, comme il y a n valeurs de ϖ qui annulent le polynôme, on aurait n valeurs analogues $A_\mu, A'_\mu, A''_\mu, \ldots$, lesquelles, en vertu de l'identité nécessaire de chacun de ces coefficients avec le premier, donneraient

$$(7'') \qquad A_\mu = A'_\mu = A''_\mu = \ldots.$$

ce qui est absurde.

Nous ne parlons pas de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, parce qu'elle est seulement indéterminée et non impossible.

De ce qui précède il résulte que dans tous les cas il suffit de s'en tenir aux expressions (4)', (4)'' des coefficients, sans faire attention aux conditions fondamentales du développement (4), car, lorsqu'un tel développement sera impossible d'une façon relative ou absolue, l'expression en question le fera toujours connaître en donnant pour les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ des quantités idéales ou absurdes.

Fonctions arbitraires. — C'est dans le sens que nous venons d'indiquer que l'on peut dire que la fonction $F(y)$ est développée en série suivant les puissances d'une fonction *arbitraire* $\varphi(y)$. Wronski entend toujours par fonction arbitraire une fonction quelconque généralement, tout en écartant celles qui donneraient lieu à des impossibilités.

Dans le cas présent où la série (4) est destinée à conduire à une valeur déterminée y ou $F(y)$ satisfaisant à l'équation (1), on peut appliquer ce développement en toute sécurité pour une fonction $\varphi(y)$ quelconque, puisque, pour arriver au résultat, autrement dit aux expressions (2) ou (3), la transformation n'a précisément lieu qu'en vue de la valeur déterminée y.

Il en serait de même dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, car, bien que l'on ait ainsi un ordre plus ou moins élevé d'indétermination, la quantité y n'en serait pas moins déterminée par les conditions du problème, lesquelles doivent seules être prises ici en considération.

C'est à la circonstance que nous signalons qu'est due la possibilité d'exprimer toutes les solutions de l'équation $\varphi(y) = 0$, au moyen des expressions (2) ou (3).

Principe de convergence de l'expression fondamentale. — En conséquence, pour obtenir une solution déterminée quand l'équation proposée en admet plusieurs, il faut disposer convenablement de la quantité w, en tenant compte de sa nature, qui est essentiellement la même que celle de la quantité y : tel est le point important de la méthode. Il sera facile de voir que cette quantité w doit se rapprocher autant que possible de la solution cherchée en examinant les conditions générales de convergence de l'expression (3).

Pour cela, en reprenant la déduction que nous avons donnée de cette expression, concevons deux quantités v et w telles que $\varphi(v)$ et $\varphi(w)$ soient différents de zéro; nous aurons, en vertu de l'identité des coefficients de la série (4) portant mêmes indices, et en faisant $\mu = 0$,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} A_0 &= \Xi_0 - \Xi_1\varphi(w) + \Xi_2[\varphi(w)]^2 - \ldots \\ &= \Xi'_0 - \Xi'_1\varphi(v) + \Xi'_2[\varphi(v)]^2 - \ldots, \end{aligned}\right.$$

$\Xi'_0, \Xi'_1, \Xi'_2, \ldots$ étant ce que deviennent les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \ldots$ quand on substitue v à w. Si la quantité w se rapproche de v, les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \ldots$ tendront respectivement vers les valeurs des coefficients $\Xi'_0, \Xi'_1, \Xi'_2, \ldots$, et $\varphi(w)$ tendra vers $\varphi(v)$, de sorte qu'à la limite l'égalité (8) aura lieu terme à terme.

Admettons maintenant que nous prenions pour v la quantité u définie par (5), c'est-à-dire $\varphi(u) = 0$; ce que nous venons de dire subsiste encore : le coefficient Ξ'_μ prend la valeur déterminée

$$(9)\quad \Xi_\mu = \frac{\begin{vmatrix} d\varphi(u) & 0 & 0 & \ldots & \ldots\ldots\ldots & dF(u) \\ d^2\varphi(u) & d^2[\varphi(u)]^2 & 0 & \ldots & \ldots\ldots\ldots & d^2F(u) \\ d^3\varphi(u) & d^3[\varphi(u)]^2 & d^3[\varphi(u)]^3 & \ldots & \ldots\ldots\ldots & d^3F(u) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & d^{\mu-1}F(u) \\ d^\mu\varphi(u) & d^\mu[\varphi(u)]^2 & d^\mu[\varphi(u)]^3 & \ldots & d^\mu[\varphi(u)]^{\mu-1} & d^\mu F(u) \end{vmatrix}}{1^{[1]}\,1^{2,1}\,1^{3,1}\ldots 1^{\mu,1}\,[d\varphi(u)]^{1+2+3+\ldots+\mu}},$$

la dérivée $\frac{d\varphi(u)}{du}$ étant généralement différente de zéro; le coefficient Ξ_μ tend vers Ξ'_μ, quand w se rapproche de u, et $\varphi(w)$ tend vers zéro. Or le second membre de (8) se réduit à $F(u)$; cette égalité tendant à avoir lieu terme à terme, il en résulte que $F(w)$ tend vers $F(u)$ et que la somme des autres termes du premier membre tend vers zéro; par suite, la série est convergente.

Ainsi la condition principale de convergence de l'expression (3) est que la quantité w se rapproche suffisamment de u, autrement dit de la quantité y donnée par l'équation (1), $\varphi(y) = 0$. Quand cette condition sera remplie convenablement, la série sera convergente même dans le cas de $\varphi(w) > 1$; dans ce cas, la convergence sera opérée par les coefficients de la série, et, si $\varphi(w) < 1$, la convergence sera opérée de plus par la fonction $\varphi(w)$ elle-même. Donc $\varphi(w) < 1$ sera un critérium de la convergence de la série, puisque les coefficients Ξ tendent, en général, vers des quantités finies et déterminées.

Ce que nous disons de l'expression (3) s'applique aussi à l'expression (2), qui n'en est qu'un cas particulier.

Maintenant, nous pouvons reconnaître que, pour obtenir une solution déterminée y_1 de l'équation $\varphi(y) = 0$, la quantité w doit être

prise aussi rapprochée que possible de l'inconnue y_1, car pour $w = y_1$ l'expression (2) ou (3) se réduit à une identité, et, à mesure que w s'éloigne de cette valeur, la série devient moins convergente et peut devenir divergente. Pour la valeur particulière w qui annule la dérivée $\frac{d\varphi(w)}{dw}$, valeur qui diffère généralement de y_1, tous les termes à partir du second étant infinis, l'expression de l'inconnue est *idéale*. La quantité w variant toujours dans le même sens et dépassant la valeur qui donne $\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0$, la série redevient simplement divergente et peut même devenir de nouveau convergente, auquel cas une nouvelle valeur y_2 de l'inconnue se trouve déterminée.

On conçoit donc bien, dès maintenant, que les expressions fondamentales (2) et (3) de la méthode secondaire élémentaire soient susceptibles de donner toutes les solutions d'une équation $\varphi(y) = 0$ d'un genre quelconque ; pour cela il importe de faire un choix convenable de la quantité arbitraire w.

Procédés secondaires pour obtenir la convergence. — D'après ce qui précède, la condition principale à remplir pour obtenir la convergence consiste dans le choix convenable de la quantité w, mais cette condition n'est pas toujours facile à remplir, ni même possible ; il faut donc, pour obtenir la convergence, ce qui est de toute nécessité, recourir dans certains cas à des moyens secondaires. Ces moyens consistent : 1° dans la transformation des séries divergentes en séries convergentes ; 2° dans l'emploi de la méthode d'exhaustion, laquelle peut être fréquemment utilisée dans les calculs. On peut aussi faire un emploi simultané de ces deux moyens.

Génération neutre. — Pour la transformation des séries divergentes, le moyen le meilleur, au point de vue des calculs, consiste à transformer la série en fraction continue, puis à obtenir les réduites successives (*voir* la *Philosophie de la Technie*, IIe Section). On obtiendra de la sorte, avec un nombre suffisant de termes, la solution cherchée avec autant d'approximation que l'on voudra. En comparant l'expression (3) à la série (4), on obtiendrait les formules suivantes.

Faisons

$$
(10) \quad \left\{
\begin{aligned}
A_0 &= F(x), \\
A_1 &= -\frac{dF(x)}{d\varphi(x)}, \\
A_2 &= \frac{\omega[d\varphi(x)\, d^2F(x)]}{1^{1|1}\, 2^{1|1}\, [d\varphi(x)]^3}, \\
A_3 &= -\frac{\omega[d\varphi(x)\, d^2[\varphi(x)]^2\, d^3F(x)]}{1^{1|1}\, 2^{1|1}\, 3^{1|1}\, [d\varphi(x)]^6}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
\right.
$$

nous aurons pour expressions donnant des valeurs de l'inconnue de plus en plus approchées,

$$
(11) \quad \left\{
\begin{aligned}
y &= F(x) + A_1\varphi(x), \\
y &= F(x) + \frac{A_1^2\varphi(x)}{A_1 - A_2\varphi(x)}, \\
y &= F(x) + \frac{A_1A_2\varphi(x) + (A_2^2 - A_1A_3)[\varphi(x)]^2}{A_2 - A_3\varphi(x)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces expressions sont celles que Wronski nomme les *progrès* de la *génération neutre* des quantités.

On obtiendrait des formules analogues, correspondant à l'expression (2), en faisant dans celles-ci $F(x) = x$.

Nous indiquerons plus loin en quoi consiste la méthode d'approximation dont nous avons parlé.

Par l'emploi des divers moyens que nous venons d'énumérer, nous arrivons à ce résultat remarquable que la méthode secondaire peut être appliquée dans tous les cas, puisque la convergence des expressions fondamentales est toujours assurée.

Sur la nature de la valeur fondamentale. — Comme nous l'avons vu, cette convergence dépend surtout du choix de la quantité x. Il faut alors considérer deux cas : 1° celui où x est une quantité purement numérique ; 2° celui où x est une véritable fonction.

Quand x est une quantité numérique et quand l'équation (1),

$\varphi(y)=0$, est une équation primitive algébrique ou transcendante, le mode d'application des formules fondamentales (2) et (3) est bien connu; nous ne nous y arrêterons pas.

Si $\varphi(y)=0$ est une équation différentielle, y est fonction au moins d'une variable indépendante x, et la quantité approchée ϖ ne suffit plus pour déterminer y, car les différentielles de l'inconnue, qui ne sont plus nulles, entrent dans les expressions fondamentales. Il faut donc admettre que l'on connaisse des valeurs approchées de l'inconnue et de ses dérivées de différents ordres, correspondant à des valeurs données de la variable indépendante; de cette façon les expressions fondamentales s'appliquent comme dans le cas des équations primitives. Les équations différentielles comprenant des ordres différents d'indétermination par rapport à l'inconnue, la quantité ϖ ne saurait être en général une quantité purement numérique. On doit donc considérer ϖ comme une fonction; c'est en cela que consiste principalement la méthode secondaire.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRIMITIVES.

Considérons une équation primitive $\varphi(y)=0$, algébrique ou transcendante; ϖ, n'étant pas une quantité dépendant d'une autre variable x, ne peut être une fonction proprement dite; ϖ n'est ici qu'une simple quantité algébrique ou transcendante, et les conditions qui la déterminent se réduisent en définitive à une équation.

Équation réduite. — Cette équation devra se rapprocher autant que possible de l'équation proposée et être nécessairement résoluble par des procédés connus; elle devra être de même nature que cette dernière et donner le même nombre de solutions. Si ces conditions sont convenablement remplies, cette nouvelle équation donnera une valeur ϖ qui rendra la fonction $\varphi(\varpi)$ aussi petite que possible, et par suite le développement aussi convergent qu'il se pourra.

Wronski nomme cette équation *équation réduite*. Il faut donc, pour obtenir cette équation, réduire l'équation proposée à ce qu'elle a d'essentiel, afin d'en tirer la valeur *fondamentale* ϖ au moyen d'une solu-

tion finie. Pour cela introduisons dans le premier membre de l'équation $\varphi(y) = 0$ une quantité arbitraire ω, de telle façon que la nouvelle fonction $\varphi(y, \omega) = 0$, qui ne sera autre que la fonction proposée pour $\omega = 1$, puisse donner une équation résoluble par les procédés ordinaires pour $\omega = 0$; la quantité ϖ que l'on tirera de cette équation réduite, qui est alors $\varphi(\varpi, 0) = 0$, sera celle que l'on devra porter ensuite dans l'expression (2) ou (3) pour obtenir la valeur de l'inconnue.

Cette quantité auxiliaire ω peut être introduite soit en coefficient, soit en exposant, et cela de bien des manières différentes. Cette quantité peut également être prise parmi les quantités qui existent déjà dans la fonction $\varphi(y)$, comme nous le verrons dans divers exemples.

D'après ce qui précède, la manière la plus convenable d'introduire la quantité auxiliaire ω doit conduire à des équations réduites, résolubles immédiatement, et dans tous les cas d'une manière théorique et finie, en ayant soin de s'écarter le moins possible de la nature générale de l'équation proposée. Nous pourrons donc choisir pour les équations algébriques, parmi les équations résolubles, les équations réciproques, ou plus généralement les équations binômes du même degré que celui de l'équation proposée. Pour les équations transcendantes, dont la forme est variable à l'infini, nous pourrons les ramener à la forme d'équations algébriques, résolubles comme il vient d'être dit.

Sur les solutions théoriques. — Il résulte de cette méthode que l'on distingue toujours deux parties dans la résolution d'une équation : l'une *finie*, ϖ ou $F(\varpi)$, donnée par l'équation réduite, constituant la partie finie de la solution et la partie essentiellement théorique, et l'autre *indéfinie*, existant généralement, formée par l'ensemble des autres termes. Si $\varphi(y) = 0$ n'admet pas de solution finie, ce qui est le cas le plus fréquent, et si l'équation réduite est déterminée de telle façon que l'on ne puisse pas en trouver une autre plus rapprochée de l'équation proposée, la valeur fondamentale que l'on en déduira rendra la fonction $\varphi(\varpi)$ aussi petite qu'il se pourra, et le développement atteindra le maximum de convergence. Par suite, la partie indéfinie de la solution sera réduite à la moindre importance, et celle-ci donnera, au contraire, à la partie finie, qui forme la partie théorique, la plus grande importance qu'elle puisse avoir. Dans ces conditions, il n'y aura plus rien

d'arbitraire dans la solution obtenue, et cette solution sera *théorique*.

Si au contraire on obtient un développement dont on pourrait encore augmenter la convergence, il y aurait dans la formation de l'équation réduite, et par suite dans la valeur fondamentale ϖ, quelque chose d'arbitraire ; la solution serait alors *technique*.

Tel est le sens que Wronski attribue à ces deux expressions de *solutions théoriques* et *techniques*. Il est évident que l'on peut obtenir une infinité de solutions techniques se rapprochant plus ou moins de la solution théorique ; on ne peut donc pas admettre *a priori* qu'une solution puisse être obtenue sous forme finie : il faut chercher dans quelles conditions la partie indéfinie de la solution peut se réduire à la moindre importance, et l'on verra, par suite, si elle peut s'annuler complètement. Ces conditions dépendent évidemment de la nature des fonctions que l'on admet à figurer dans la solution ; nous reviendrons sur ce sujet [1].

Méthode d'exhaustion. — Maintenant disons un mot de la méthode d'exhaustion dont nous avons parlé, méthode qui doit suppléer à l'insuffisance de la convergence de l'expression fondamentale, quand cela se présente. Nous admettons que nous ne puissions former convenablement une équation réduite $\varphi(\varpi, 0) = 0$ de telle sorte que l'expression fondamentale (2) ou (3) soit divergente ou trop lentement convergente pour exprimer la solution de l'équation proposée $\varphi(y, 1) = 0$, ou, ce qui revient au même, $\varphi(\varpi, \omega) = 0$, quand on donne à la quantité ω la valeur 1.

D'après ce que nous avons vu, nous aurons ordinairement, dans ce cas, $\varphi(\varpi, 1) > 1$. Donnons à ω une valeur ω_0 comprise entre zéro et l'unité, telle que $\varphi(\varpi_0, \omega_0) < 1$, ϖ_0 désignant maintenant la valeur fondamentale ; cette condition assurera la convergence du développement et donnera une solution ϖ_1, qui, sans être la solution cherchée, s'en rapprochera davantage que la valeur ϖ_0 donnée par l'équation réduite. Prenons à son tour ϖ_1 comme valeur fondamentale, si $\varphi(\varpi_1, 1) < 1$, on pourra obtenir avec une convergence suffisante la solution cherchée. Autrement nous prendrons une valeur ω_1 de la quantité auxiliaire ω,

---

[1] La recherche de ces conditions fait l'objet de la méthode suprême.

comprise entre ω_0 et l'unité, de telle sorte que $\varphi(\varpi_1, \omega_1) < 1$. La valeur ϖ_1 portée dans l'équation fondamentale donnera une seconde valeur ϖ_2, laquelle, étant considérée à son tour comme valeur fondamentale, donnera la solution cherchée si $\varphi(\varpi_2, 1) < 1$.

On pourra ainsi faire plusieurs substitutions des quantités ϖ_0, ϖ_1, ϖ_2, ..., données au moyen des quantités auxiliaires ω_0, ω_1, ω_2, ... ; mais le nombre en sera toujours restreint, par la raison que les déterminations successives des quantités ω contenues entre zéro et l'unité ne sauraient être nombreuses (*voir*, pour la méthode secondaire élémentaire et pour la méthode d'exhaustion applicable dans ce cas, *la Réforme*, t. I, p. lxxviij à lxxxiv).

Premier exemple. — Pour éclaircir les développements que nous venons de donner sur la méthode secondaire, nous pouvons appliquer cette méthode à un exemple. Devant traiter spécialement des équations algébriques dans la méthode secondaire systématique, nous laisserons provisoirement ces équations. Pour l'instant, nous allons résoudre une équation transcendante dont Wronski a donné la solution (voir *la Réforme*, t. I, p. cccxxij et cccxxiij).

Soit le système d'équations

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \sin\xi = \dfrac{r\mu\nu}{\theta e \mathrm{H} g}\,\dfrac{\varphi\cos\alpha + \sin(\alpha-\omega)}{\cos\alpha}, \\ \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\theta e}{r}\,\dfrac{1-\cos\xi}{\xi}; \end{cases}$$

les quantités ξ et ω sont les inconnues, et les autres des constantes. Posons, pour abréger,

$$(\alpha)'\qquad n = \frac{\theta e}{r},\quad m = \frac{\mu\nu}{\mathrm{H} g}\quad \text{et}\quad p = \frac{1-\cos\xi}{\xi}.$$

D'après les conditions du problème, les constantes m et n sont sensiblement égales, la première à $\frac{1}{3}$ et la seconde à l'unité, ou du moins s'écartent peu de ces valeurs; quant aux angles α et φ, ce sont de très faibles quantités.

Nous pourrons écrire ainsi les équations proposées :

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \sin\xi = \dfrac{m}{n}\,\dfrac{\varphi\cos\alpha + \sin(\alpha - \omega)}{\cos\alpha}, \\ \operatorname{tang}\omega = np. \end{cases}$$

Or la première équation donne

$$\frac{n}{m}\sin\xi = \operatorname{tang}\alpha\cos\omega - \sin\omega + \varphi,$$

et, substituant ici la valeur de $\sin\omega$ tirée de la deuxième équation (β), nous avons

$$1 = (1 + n^2p^2)\cos^2\omega.$$

Enfin, éliminant $\cos\omega$ entre les deux dernières équations, il vient

$$(\gamma)\qquad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\sqrt{1 + n^2p^2} = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre; en effet, connaissant l'angle ξ, la deuxième équation (α) donnera l'inconnue ω.

Remarquons que la quantité $p = \frac{1 - \cos\xi}{\xi}$ est toujours plus petite que l'unité; de plus, n étant sensiblement égal à l'unité, la quantité $\sqrt{1 + n^2p^2}$ différera généralement peu de l'unité; nous pouvons donc former l'équation réduite de la manière suivante :

$$(\delta)\qquad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\left(\sqrt{1 + n^2p^2}\right)^a = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Nous désignons ici par a la quantité auxiliaire que nous avons jusqu'ici exprimée par ω, pour ne pas la confondre avec l'angle ω qui est une des inconnues des équations (α). L'équation (δ) pour $a = 1$ reproduit l'équation (γ) et pour $a = 0$ donne l'équation réduite

$$(\delta)'\qquad \frac{n}{m}\sin\xi - \varphi = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Afin de distinguer la valeur fondamentale tirée de cette équation de la valeur ξ de l'inconnue, nous mettrons ψ à la place de ξ dans l'équation réduite, comme nous avons mis v à la place de y pour l'exposition de la méthode. Nous aurons ainsi pour équation réduite

$$(\varepsilon) \qquad \frac{n}{m}\sin\psi - \varphi = \operatorname{tang}\alpha - nq,$$

en faisant

$$(\varepsilon)' \qquad q = \frac{1-\cos\psi}{\psi}.$$

La solution donnée par Wronski indique que l'équation réduite a été formée en introduisant d'une manière différente la quantité auxiliaire a; l'équation (δ) devrait être alors

$$(\zeta) \quad \left(\frac{n}{m}\sin\xi - \varphi\right)\left(\sqrt{1+n^2p^2} + \frac{\sqrt{1+n^2p^2(a-1)^2}}{a-1} - \frac{1}{a-1}\right) = \operatorname{tang}\alpha - np.$$

Pour $a = 1$ on a aussi l'équation proposée (γ), et pour $a = 0$ on a l'équation réduite $(\delta)'$.

Nous pouvons nous en tenir à l'équation (ε), que nous allons d'abord résoudre.

Substituons aux quantités $\sin\psi$ et $\cos\psi$ les valeurs données par les égalités

$$\sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}\psi\cos\tfrac{1}{2}\psi,$$
$$1-\cos\psi = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi.$$

L'équation réduite devient

$$(\eta) \qquad \sin\psi = \frac{m}{n}\,\frac{\varphi + \operatorname{tang}\alpha}{1 + \frac{m}{\psi}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}.$$

Designons par X le rapport suivant, très peu variable pour de faibles

valeurs de ψ :

$$(\theta) \qquad X = \frac{1}{\psi} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi.$$

L'équation (η) s'écrira

$$(\eta)' \qquad \sin \psi = \frac{m}{n} \frac{\varphi - \operatorname{tang} \alpha}{1 - m X}.$$

L'angle cherché ξ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et, comme X est une quantité très peu variable, on pourra, pour avoir une première valeur suffisante de X, prendre pour ψ une valeur moyenne de 30°, ce qui donnera environ $X = \frac{4}{7}$. L'équation $(\eta)'$ donnera ainsi la valeur fondamentale ψ.

La quantité q donnée par $(\varepsilon)'$ peut s'écrire

$$(\iota) \qquad q = \frac{1 - \cos \psi}{\psi} = X \sin \psi,$$

et sa dérivée est

$$(\iota)' \qquad \frac{dq}{d\psi} = \frac{1}{\psi} \sin \psi (1 - X).$$

Enfin, si l'on change ψ en ξ, q en p et X en Y, l'équation proposée (γ) devient

$$(\varkappa) \qquad \left(\frac{n}{m} \sin \xi - \varphi\right) \sqrt{1 + n^2 Y^2 \sin^2 \xi} = \operatorname{tang} \alpha - n Y \sin \xi.$$

Telle est la forme la plus convenable pour appliquer la méthode secondaire.

La quantité inconnue est ξ, mais la quantité cherchée est $\sin \xi$; nous aurons donc recours à l'expression (3), que nous écrirons

$$(\lambda) \qquad F(y) = F(w) - \varphi(w) \frac{dF(w)}{dw} \frac{1}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} + \ldots.$$

Puisque $F(y)$ est ici $\sin\xi$, nous mettrons pour $F(w)$

$$(\mu) \qquad \sin\psi \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n}\,\frac{\varphi + \operatorname{tang}\alpha}{1 + mX},$$

et pour $\frac{dF(w)}{dw}$

$$(\mu)' \qquad \cos\psi;$$

$\varphi(w)$ est

$$(\nu) \qquad \left(\frac{n}{m}\sin\psi - \varphi\right)\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi} - \operatorname{tang}\alpha + nX\sin\psi,$$

et, puisque ψ satisfait à l'équation réduite (ε), on peut écrire cette quantité

$$(\nu)' \qquad (\operatorname{tang}\alpha - nX\sin\psi)\left(\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi} - 1\right).$$

La dérivée de $\varphi(w)$ prise sur l'expression (ν), en ayant égard à (ι) et $(\iota)'$, peut s'écrire

$$\frac{n}{m}\cos\psi\left[\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi} + m\frac{\operatorname{tang}\psi}{\psi}(1 - X)\left(1 - \operatorname{tang}\alpha\frac{nX\sin\psi}{\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi}} + \frac{n^2X^2\sin^2\psi}{\sqrt{1 + n^2X^2\sin^2\psi}}\right)\right].$$

En développant les radicaux $\sqrt{1 + n^2q^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1 + n^2q^2}}$, et faisant

$$(\nu)'' \qquad \left\{\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4}n^2q^2 + \frac{1^{2|2}}{2^{3|2}}n^4q^4 - \frac{1^{3|2}}{2^{4|2}}n^6q^6 + \ldots, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + n^2q^2}} &= 1 - \frac{1}{2}n^2q^2 + \frac{1^{2|2}}{2^{2|2}}n^4q^4 - \frac{1^{3|2}}{2^{3|2}}n^6q^6 + \ldots, \\ \Phi &= \frac{\operatorname{tang}\alpha + n}{\sqrt{1 + n^2q^2}}, \end{aligned}\right.$$

on a définitivement, pour $\varphi(w)$ et $\frac{d\varphi(w)}{dw}$,

$$(\xi)\quad \begin{cases} (\operatorname{tang}\alpha - nX\sin\psi)\Omega, \\ \frac{n}{m}\cos\psi\left[1 + m\frac{\operatorname{tang}\psi}{\psi}(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2\right]. \end{cases}$$

Faisons dans (λ) les substitutions de $F(w)$, $\varphi(w)$ et de leurs dérivées, nous obtenons

$$(o)\quad \begin{cases} \sin\xi = \frac{n}{m}\frac{\varphi + \operatorname{tang}\alpha}{1 + mX} \\ \quad - mn\operatorname{tang}\alpha\frac{\Omega(X\sin\psi)^2}{1 + \frac{m}{\psi}\operatorname{tang}\psi(1 - X)(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2} \\ \quad + mn^2\frac{\Omega(X\sin\psi)^3}{1 + \frac{m}{\psi}\operatorname{tang}\psi(1 - X)(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2} + \ldots. \end{cases}$$

Telle est la solution de l'équation proposée (γ) ou $(\varkappa)$. L'équation réduite différant très peu de l'équation proposée, cette expression est très convergente et les termes calculés sont suffisants.

Cette solution diffère de celle donnée par Wronski en ce que nous avons de plus les quantités Φnq et $\Omega n^2 q^2$. D'après les données de la question, ces quantités sont complètement négligeables; mais nous les avons trouvées parce que cette solution est obtenue par la méthode élémentaire, tandis que Wronski obtient la sienne par la méthode systématique. On peut voir par cet exemple l'avantage de cette dernière méthode sur celle que nous traitons, puisqu'elle élimine des fonctions qui sont négligeables par elles-mêmes.

Remarquons encore que la fonction Ω doit se réduire à la valeur $\frac{1}{2}$, puisque les quantités n^2q^2, n^4q^4, ... sont négligeables. Cette fonction Ω, donnée par la première équation $(\nu)''$, diffère un peu de celle que donne Wronski, savoir

$$\Omega = \frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4}n^2q^2 + \frac{1^3|^2}{2^{3|2}}n^4q^4 - \ldots.$$

Cette différence tient encore à la méthode que nous avons employée, mais elle tient aussi à la forme que nous avons donnée à l'équation transformée δ ou ζ, ainsi que nous le verrons plus loin en reprenant l'équation proposée à l'occasion de la méthode secondaire systématique.

Sur quelques théorèmes de Mécanique;

PAR M. H. RESAL.

I. — *L'accélération d'un point libre, lorsque sa direction est constante, est proportionnelle au rapport du cube de la vitesse du mobile au rayon de courbure de sa trajectoire* (¹).

Nous remarquerons d'abord que la courbe est plane.

Soient, au bout du temps t, v, ρ, α la vitesse du mobile m, le rayon de courbure de la trajectoire, l'angle formé par la direction de l'accélération φ avec la normale. On a

$$\varphi \cos\alpha = \frac{v^2}{\rho},$$

d'où

$$\varphi = \frac{v^3}{\rho v \cos\alpha}. \tag{1}$$

Or $v \cos\alpha$ est la composante de la vitesse suivant la normale à la direction de l'accélération; elle est donc constante et égale à $v_0 \cos\alpha_0$, l'in-

(¹) Ce théorème a été énoncé pour la première fois, à ma connaissance du moins, par M. E.-T. Habich, qui l'a déduit de l'Analyse, dans une brochure intitulée *Études cinématiques*.

dice o se rapportant à un instant déterminé t_0. Nous avons ainsi

$$(2) \qquad \varphi = \frac{v^3}{\rho v_0 \cos\alpha_0},$$

ce qu'il fallait établir.

Remarque. — Soit c la corde du cercle osculateur déterminé par la direction de φ; on sait que

$$(a) \qquad \varphi = \frac{2v^2}{c};$$

par suite,

$$\frac{\rho}{c} = \frac{v}{2v_0 \cos\alpha_0}.$$

Donc *le rapport du rayon de courbure à la corde interceptée dans le cercle osculateur par la direction de l'accélération est proportionnel à la vitesse.*

Application à la détermination du rayon de courbure de la parabole. — Considérons une parabole décrite par un point matériel pesant m dont la masse est censée égale à l'unité et dont la vitesse initiale v_0 est dirigée suivant l'horizontale m_0y du point de départ m_0. Soient m_0x la verticale de m_0, F le foyer et $2p$ le paramètre de la courbe. On a

$$\alpha_0 = 0, \quad x = \frac{gt^2}{2}, \quad y = v_0 t,$$

$$(3) \qquad y^2 = 2\frac{v_0^2}{g}x = 2px,$$

$$(4) \qquad p = \frac{v_0^2}{g}.$$

Le principe des forces vives donne

$$v^2 = v_0^2 + 2gx = g(p + 2x).$$

De l'équation (2) on déduit immédiatement la formule connue

$$\rho = \sqrt{\frac{p+2x}{p}}(p+2x) = 2\sqrt{\frac{\mathrm{F}m}{\mathrm{F}m_0}}\,\mathrm{F}m.$$

II. — *L'accélération d'un point dirigée vers un centre fixe est proportionnelle au cube de la vitesse, au rayon vecteur et à la courbure de la trajectoire.*

Comme dans le cas précédent, la courbe est plane. Soient O le centre fixe, $r = Om$ le rayon vecteur, α l'angle qu'il forme avec la normale. L'indice o continuera à distinguer les notations qui se rapportent à un instant déterminé défini par la valeur t_0 du temps t. On a, d'après le principe des aires,

$$v_0 r_0 \cos\alpha_0 = vr \cos\alpha,$$

et l'équation (1), qui est générale et applicable dans tous les cas, donne

$$(5) \qquad \varphi = \frac{rv^3}{\rho rv \cos\alpha} = \frac{rv^3}{\rho r_0 v_0 \cos\alpha_0},$$

expression dans laquelle on ne devra considérer que les valeurs absolues de φ, ρ, $\cos\alpha_0$. Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.

Remarque. — Des formules (a) et (5) on déduit

$$\frac{\rho}{c} = \frac{rv}{2 r_0 v_0 \cos\alpha_0},$$

d'où un nouveau théorème qu'il est facile d'énoncer.

Applications. — 1° *Rayon de courbure de l'ellipse.* — Considérons l'ellipse comme décrite par un point dont l'accélération est dirigée vers le centre de la courbe et égale au rayon vecteur. Soient Ox, Oy les directions de deux demi-axes a, b; A, B les sommets de ces demi-axes. Nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y,$$

d'où, en appelant M, N, M′, N′ des constantes,

$$x = \mathrm{M}\cos t + \mathrm{N}\sin t + y = \mathrm{M}'\cos t + \mathrm{N}'\sin t.$$

Prenons pour vitesse initiale celle du passage du mobile au point A ; nous aurons, en remarquant que $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = v_0$ pour $t = 0$,

$$x = a\cos t,$$
$$y = v_0 \sin t,$$

d'où

$$v_0 = b$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

D'ailleurs $\alpha_0 = 0$, $r_0 = a$, $\varphi = r$ et, d'après l'équation des forces vives, $v^2 = v_0^2 - (r^2 - r_0^2) = a^2 + b^2 - r^2$; la formule (5) donne par suite

$$\rho = \frac{(a^2 + b^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

2° *Rayon de courbure de l'hyperbole.* — Soient Ox, Oy les directions de l'axe réel $2a$ et de l'axe imaginaire $2b$ de l'hyperbole.

Nous pouvons considérer la courbe comme étant décrite par un point dont l'accélération, dirigée suivant $r = Om$, est égale à ce rayon vecteur. Nous avons ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = y,$$

d'où

$$x = \mathrm{M}e^t + \mathrm{N}e^{-t},$$
$$y = \mathrm{M}'e^t + \mathrm{N}'e^{-t}.$$

Si nous prenons pour v_0 la vitesse du mobile à son passage à l'un des sommets de l'axe réel, nous avons

$$x = a, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$
$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

pour $t = 0$, d'où

$$x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{v_0}{2}(e^t - e^{-t}),$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{v_0^2} = 1,$$

et, par suite,

$$v_0 = b.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha_0 = 0, \quad r_0 = a, \quad \varphi = r, \quad v^2 = v_0^2 + r^2 - r_0^2 = b^2 - a^2 + r^2,$$

et l'équation (5) donne, par suite,

$$\rho = \frac{(r^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, on a simplement

$$\rho = \frac{r^3}{a^2},$$

d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

3° *Rayon de courbure d'une courbe dont l'équation est exprimée en coordonnées polaires.* — Soient r, v, ω, k le rayon vecteur, l'angle polaire, la vitesse angulaire du rayon vecteur et une constante.

D'après le principe des aires, la génération de la courbe dérivera d'une accélération centrale si l'on a

$$v_0 r_0 \cos\alpha_0 = \omega r^2 = k.$$

d'où

$$(6) \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2}.$$

L'équation (5) devient alors

$$(5') \qquad \varphi = \frac{rv^3}{\rho k}.$$

On a d'abord

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\omega = \dfrac{k}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}, \\ \dfrac{d^2r}{dt^2} = k\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}\right) = k\omega\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}\right) = \dfrac{k^2}{r^2}\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2r}{d\theta^2} - \dfrac{2}{r^3}\dfrac{dr^2}{d\theta^2}\right). \end{cases}$$

La vitesse v étant la résultante de $\frac{dr}{dt}$ et de ωr, il vient

$$(8) \qquad v = \frac{k}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, l'accélération absolue φ n'est autre chose que la résultante de l'accélération relative $\frac{d^2r}{dt^2}$ et de l'accélération d'entraînement $-\omega^2 r$ estimée suivant le rayon vecteur. On a ainsi

$$(9) \qquad \varphi = \frac{d^2r}{d\theta^2} - \omega^2 r = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{k^2}{r^3} = \frac{k^2}{r^3}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} - 1\right).$$

Enfin la formule (5′) donne, en ayant égard aux valeurs (8) et (9),

$$(10) \qquad \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} - 1 = \pm\frac{r}{\rho}\sqrt{\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} + 1}.$$

Soit $r = a\theta^m$; on a

$$m(m-3)\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{2}{m}} + 1 = \pm\frac{r}{\rho}\left[m^2\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{2}{m}} + 1\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Lorsque $m = 1$, on trouve la formule connue relative à la spirale d'Archimède :

$$\rho = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}.$$

Pour la spirale hyperbolique, $m = -1$ et

$$\rho = \frac{r(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a(3r^2 + a^2)}.$$

L'équation $r = ae^{m\theta}$ de la spirale logarithmique et la formule (10) conduisent au résultat connu

$$\rho = r(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

III. — *Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution.*

Étant données une surface de révolution et une courbe tracée sur cette surface, la courbe peut être considérée comme étant décrite par un point matériel m qui se déplace sur la section méridienne en même temps que le plan méridien tourne autour de l'axe de révolution. Il y a évidemment entre ces deux mouvements une certaine dépendance qui se déduira de la nature même de la courbe donnée.

Nous pouvons supposer que la masse du point décrivant est égale à l'unité, pour ne pas introduire un facteur commun qui disparaîtrait dans les équations finales.

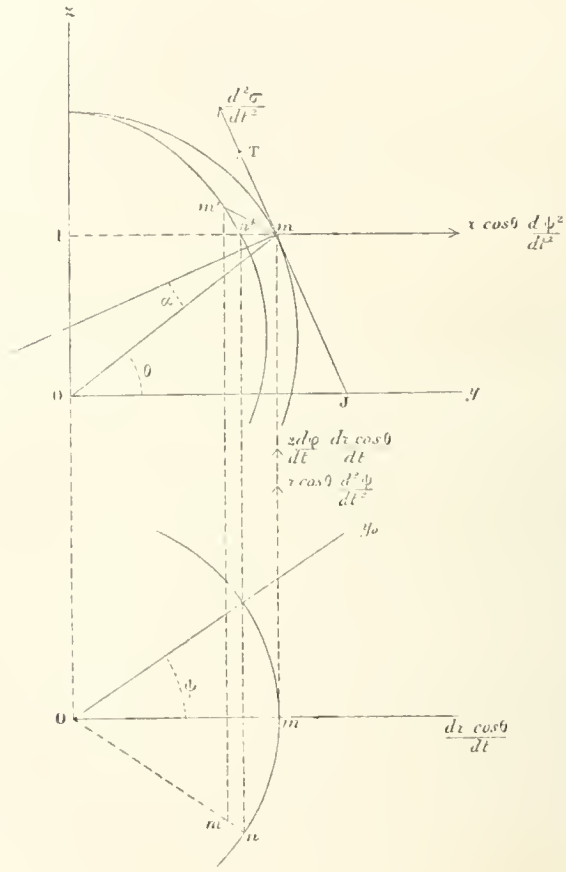
Proposons-nous maintenant de déterminer les conditions que doivent remplir les composantes, suivant la méridienne et la tangente au parallèle, d'une force capable de faire décrire au mobile, dans son double mouvement, la courbe donnée. (Il n'y a pas lieu de s'occuper de la composante normale, qui est complètement arbitraire, pourvu qu'elle soit suffisante pour maintenir le mobile sur la surface.)

Parmi tous les systèmes de ces composantes qui satisfont aux conditions qu'il s'agit de trouver, il y en aura un qui sera plus simple que tous les autres, et c'est ce système qu'il conviendra de choisir.

On évaluera ensuite la *composante géodésique* (perpendiculaire à la vitesse dans le plan tangent), dont on déduira la position du plan osculateur, et par suite le rayon de courbure de la courbe donnée.

Emploi des coordonnées sphériques. — Soient (*fig.* 1)

Fig. 1.



Oz l'axe de révolution;

Oy la perpendiculaire en un point O de cet axe comprise dans le plan du méridien mobile;

ψ l'angle formé par Oy avec l'une de ses positions antérieures bien définie Oy_0 ou, si l'on veut, la longitude du méridien mobile;

m la position du point décrivant correspondant à la longitude ψ, à la latitude $\theta = mOy$ et au rayon vecteur $r = Om$;

$mI = r\cos\theta$ le rayon du parallèle passant par m;

$d\sigma = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\cos^2\theta\, d\psi^2}$ l'arc élémentaire de la section méridienne;

α l'angle formé par la normale à cette courbe avec Om, et qui est déterminé par la relation

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}.$$

Soient, de plus,

R le rayon de courbure de la section méridienne;

J l'intersection de la méridienne avec Oy;

T, P les composantes de la force extérieure estimées suivant la méridienne dans le sens de $d\theta$ et la tangente au parallèle dans le sens de ψ.

Nous avons

$$(2)\qquad \widehat{mJy} = \theta + 90^\circ - \alpha.$$

Si entre les équations de la courbe donnée on élimine successivement ψ et r, on obtiendra deux relations de la forme

$$(3)\qquad r = F(\theta),$$

$$(4)\qquad \psi = f(\theta),$$

dont la première n'est autre chose que l'équation polaire de la courbe méridienne.

L'accélération relative de m est $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Les accélérations apparentes dues à la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ sont :

1° L'accélération centrifuge

$$(a)\qquad r\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2},$$

dirigée suivant Im;

2° L'accélération tangentielle d'entraînement changée de sens,

$$b \qquad r\cos\theta\frac{d^2\psi}{dt^2},$$

dont la direction est opposée à celle de P;

3° L'accélération centrifuge composée, due à la vitesse relative projetée sur le plan de l'équateur

$$\frac{d.ml}{dt} = \frac{dr\cos\theta}{dt},$$

et dont la direction est la même que celle de l'accélération ci-dessus: elle a pour valeur

$$c \qquad 2\frac{d\psi}{dt}\frac{dr\cos\theta}{dt}.$$

Le théorème de Coriolis donne, suivant les directions de P et de T,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\sigma}{dt^2} = \mathrm{T} - r\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\dfrac{d\psi^2}{dt^2}, \\ 0 = \mathrm{P} - r\cos\theta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} - 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dr\cos\theta}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on prend pour variable $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ au lieu de t, et que l'on pose $\omega^2 = w$, on reconnaît facilement que ces équations deviennent

$$\mathrm{T} = w\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{d\theta}\frac{d\sigma}{d\theta} + w^2 r\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\frac{d\psi^2}{d\theta^2},$$

$$\mathrm{P} = r\cos\theta\left(w\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{d\theta}\frac{d\psi}{d\theta}\right) + 2w\frac{d\psi}{d\theta}\frac{dr\cos\theta}{d\theta}.$$

On voit ainsi que w est indéterminé et que l'on obtiendra les expressions les plus simples de T et de P en supposant $w = 1$, ce qui revient à prendre $\theta = t$. On a alors

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = \dfrac{d^2\sigma}{d\theta^2} + r\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\dfrac{d\psi^2}{d\theta^2}, \\ \mathrm{P} = r\cos\theta\dfrac{d^2\psi}{d\theta^2} + 2\dfrac{d\psi}{d\theta}\dfrac{dr\cos\theta}{d\theta}. \end{cases}$$

En appelant i l'angle formé par la tangente à la courbe donnée avec la méridienne, on a évidemment

$$r \cos\theta \, d\psi = r \, d\theta \operatorname{tang} i,$$

d'où

$$(7) \qquad \operatorname{tang} i = \cos\theta \frac{d\psi}{d\theta}.$$

La composante géodésique de la force extérieure sera

$$(8) \qquad S = T \sin i - P \cos i = \cos i (T \operatorname{tang} i - P)$$

Si, au lieu de se donner la relation (4), on veut la déterminer de manière que la courbe soit une ligne géodésique de la surface, elle sera remplacée par $S = 0$ ou par

$$(9) \qquad T \operatorname{tang} i = P.$$

Revenons au cas général et désignons par χ l'inclinaison du plan osculateur de la courbe sur le plan normal à cette courbe dont l'élément est désigné par ds. Nous avons

$$ds = \frac{r \, d\theta}{\cos i}.$$

La courbure géodésique étant $\frac{\operatorname{tang}\chi}{R}$, il vient, en se reportant à un théorème connu,

$$\frac{r^2}{\cos^2 i} \frac{\operatorname{tang}\chi}{R} = S,$$

d'où

$$(10) \qquad \operatorname{tang}\chi = \frac{SR \cos^2 i}{r^2}.$$

La détermination de l'angle χ conduit naturellement à celle du rayon de courbure de la courbe, qui sera donné par le théorème de Meusnier.

Application aux courbes sphériques. — Nous avons, dans ce cas,

$$\alpha = 0,$$
$$\varepsilon = R = \text{const.},$$
$$\sigma = R\theta.$$

En posant

$$u = \frac{d\theta}{di},$$

les équations (6) donnent

$$\frac{T}{R} = \sin\theta\cos\theta\, u^2,$$
$$\frac{P}{R} = \cos\theta\frac{du}{d\theta} - 2u\sin\theta.$$

Si la courbe est une loxodromie ou si i est constant, on a, en ayant égard à la formule (7),

$$u = \frac{\operatorname{tang} i}{\cos i}, \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{\operatorname{tang} i \sin\theta}{\cos^2\theta},$$
$$\frac{T}{R} = \operatorname{tang}^2 i \operatorname{tang}\theta,$$
$$\frac{P}{R} = -\operatorname{tang} i \operatorname{tang}\theta,$$
$$\frac{S}{R} = \operatorname{tang} i \operatorname{tang}\theta$$

et enfin

$$\operatorname{tang}\chi = \sin i \operatorname{tang}\theta.$$

Cette formule, qui se vérifie pour $i = 0$ et $i = 90^\circ$, c'est-à-dire pour une section méridienne et les parallèles définis par les angles $\pm\theta$, montre que *χ est un côté d'angle droit d'un triangle sphérique, opposé à l'angle θ, et dont l'autre côté d'angle droit est i*, d'où une construction que l'on peut facilement effectuer.

Emploi des coordonnées cylindriques. — Soient

z l'ordonnée du mobile m, parallèle à l'axe de révolution Oz;
r le rayon $m1$ du parallèle;

β l'angle TJy formé par la méridienne avec le rayon de l'équateur :

$$(1)\qquad r = F(z), \quad \psi = f(z)$$

l'équation du méridien et la seconde des équations qui servent à définir la courbe. Nous avons

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{dz}{dr}$$

et, en nous reportant aux formules et notations qui précèdent,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\sigma}{dt^2} = T + r\cos\beta\dfrac{d\psi^2}{dt^2}, \\ 0 = P - r\dfrac{d^2\psi}{dt^2} - 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dr}{dt}. \end{cases}$$

En substituant à t la variable $\omega = \dfrac{dz}{dt} = \sqrt{w}$, ces équations deviennent

$$T = w\frac{d^2\sigma}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{dz}\frac{d\sigma}{dz} + wr\cos\beta\frac{d\psi^2}{dz^2},$$

$$P = r\left(w\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{dw}{dz}\frac{d\psi}{dz}\right) + 2w\frac{d\psi}{dz}\frac{dr}{dz}.$$

Comme w reste indéterminé, on peut, pour plus de simplicité, le supposer constant et même égal à l'unité, la suppression de l'homogénéité n'offrant aucun inconvénient, puisque dans ce qui suit, comme dans ce qui précède, on ne considérera que des rapports. Il vient alors

$$(4)\qquad \begin{cases} T = \dfrac{d^2\sigma}{dz^2} + r\cos\beta\dfrac{d\psi^2}{dz^2}, \\ P = r\dfrac{d^2\psi}{dz^2} + 2\dfrac{d\psi}{dz}\dfrac{dr}{dz}, \\ S = \cos i\,(T\operatorname{tang} i - P), \end{cases}$$

avec les relations

$$(5)\qquad \operatorname{tang} i = \frac{r\,d\psi}{d\sigma} = -\frac{r\dfrac{d\psi}{dz}}{\sqrt{1 + \dfrac{dr^2}{dz^2}}},$$

$$(6)\qquad \operatorname{tang}\chi = \frac{SR}{\left(1 + \dfrac{dr^2}{dz^2}\right)(r^2 + z^2)}.$$

Dans le cas d'un cylindre de révolution,

$$r = \text{const.},$$
$$d\sigma = dz,$$
$$\operatorname{tang} i = r\frac{d\psi}{dt};$$

par suite,

$$T = 0,$$
$$P = r\frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

L'équation différentielle des lignes géodésiques est donc $P = 0$ ou

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = 0,$$

d'où

$$\psi = Az + C,$$

équation qui représente bien la famille des hélices.

Nous allons appliquer maintenant les formules ci-dessus aux lignes tracées sur un tore.

Soient $b = CO$ la distance à Oz du centre C du cercle générateur; $mC = a$ le rayon mené en un point quelconque m de la circonférence; φ l'inclinaison de ce rayon sur OC. Nous supposerons, en nous basant sur les considérations exposées plus haut, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$ ou $t = \varphi$. Nous avons

$$r = b + a\cos\varphi, \quad z = a\sin\varphi, \quad d\sigma = a\,d\varphi, \quad \beta = \varphi + 90^\circ.$$

En posant $\frac{d\psi}{d\varphi} = u$, les formules (3) et (5) deviennent

$$T = (b + a\cos\varphi)\sin\varphi\, u^2,$$
$$P = (b + a\cos\varphi)\frac{du}{d\varphi} - 2ua\sin\varphi,$$
$$\operatorname{tang} i = \left(\frac{b + a\cos\varphi}{a}\right)u.$$

Nous ne nous occuperons ici que des lignes géodésiques du tore, qui sont données par

$$\left(\frac{b + a\cos\varphi}{a}\right)^2 \sin\varphi \,.\, u^3 = (b + a\cos\varphi)\frac{du}{d\varphi} - 2ua\sin\varphi.$$

Si l'on multiplie par u, et que l'on pose $u^2 = v$, on trouve

$$\frac{dv}{d\varphi} - \frac{(av\sin\varphi}{b + a\cos\varphi} - \frac{2(b + a\cos\varphi)}{a}v^2\sin\varphi = 0,$$

d'où, en divisant par v^2,

$$\frac{d\frac{1}{v}}{d\varphi} + \frac{(a\sin\varphi}{b + a\cos\varphi}\frac{1}{v} + \frac{2(b + a\cos\varphi)\sin\varphi}{a} = 0,$$

équation différentielle linéaire en $\frac{1}{v}$ dont l'intégrale est, en désignant par C une constante,

$$\frac{1}{v} = \frac{C}{a^4}(b + a\cos\varphi)^4 - \frac{1}{a^2}(b + a\cos\varphi)^2,$$

d'où

$$d\psi = \frac{a^2 d\varphi}{(b + a\cos\varphi)^2\sqrt{C - \frac{a^2}{(b + a\cos\varphi)^2}}},$$

équation dont il nous paraît impossible d'exprimer, en général, l'intégrale au moyen des fonctions connues.

Si $b = 0$ ou s'il s'agit d'une sphère, on a, en remplaçant $C - 1$ par A^2,

$$d\psi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{A^2 - \tang^2\varphi}},$$

d'où, ε étant une constante,

$$\psi + \varepsilon = \arcsin\frac{\tang\varphi}{A}$$

ou

$$\tang\varphi = A\sin(\psi + \varepsilon).$$

qui est l'équation polaire la plus générale d'un plan passant par le centre.

Nous ne multiplierons pas davantage les exemples. Qu'il nous suffise d'avoir montré que l'on peut, dans certaines circonstances, tirer un bon parti de la méthode nouvelle que nous venons d'exposer.

Applications mécaniques du Calcul des quaternions;

PAR M. GENTY.

Préliminaires.

Le Calcul des quaternions commence à prendre faveur en France, grâce aux remarquables travaux de M. Laisant. Cependant il y a encore beaucoup à faire pour arriver à rendre familière aux géomètres français cette méthode si riche en applications, et qui, depuis longtemps déjà, est devenue classique en Angleterre et en Allemagne. Il m'a donc semblé utile et intéressant de prendre pour sujet d'étude, à la suite de M. Laisant, quelques-unes des nombreuses questions de Mécanique auxquelles se prête d'une manière si heureuse la méthode d'Hamilton. Le présent Mémoire est consacré à l'exposition de la théorie de l'équilibre astatique, qui a fait l'objet d'un Mémoire fort intéressant de M. Darboux, présenté à la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

Théorie de l'équilibre astatique.

Soit un corps en équilibre soumis à l'action de n forces F, F_1, ..., de grandeurs et de directions constantes, appliquées aux points M, M_1, ... respectivement. Cherchons les conditions pour que l'équilibre subsiste quand on fait tourner le corps d'un angle quelconque autour d'un axe arbitraire passant par l'origine.

Le corps étant en équilibre dans son état initial, on a

$$(1) \qquad \Sigma \mathrm{F} = \mathrm{R} = 0,$$

$$(2) \qquad \Sigma \mathfrak{V} \mathrm{FM} = 0,$$

en désignant par R la résultante générale (ou de translation) des forces données.

Cela posé, une rotation quelconque du corps autour d'un axe arbitraire pourra être représentée par $Q(\ )Q^{-1}$, Q étant un quaternion unitaire dont le vecteur a la même direction que l'axe de la rotation, et les équations de l'équilibre après la rotation seront

$$\mathrm{R} = 0,$$

$$(3) \qquad \Sigma \mathfrak{V} Q \mathrm{M} Q^{-1} \mathrm{F} = 0.$$

L'équation (3), devant être vérifiée quel que soit Q, entraine évidemment

$$\Sigma \mathrm{M} Q^{-1} \mathrm{F} = 0.$$

Cette équation se décompose elle-même dans les deux suivantes :

$$\Sigma \mathfrak{S} \mathrm{M} Q^{-1} \mathrm{F} = 0,$$

$$\Sigma \mathfrak{V} \mathrm{M} Q^{-1} \mathrm{F} = 0.$$

La première donne, en tenant compte de l'équation (2),

$$(4) \qquad \Sigma \mathfrak{S} \mathrm{FM} = 0,$$

et la seconde

$$\Sigma \mathfrak{V}.\mathfrak{V} Q^{-1} \mathrm{FM} = 0,$$

ou, en développant et tenant compte des équations (2) et (4),

$$\Sigma \mathrm{M} \mathfrak{S} \mathrm{F} \mathfrak{V} Q^{-1} = \Sigma \mathrm{F} \Sigma \mathrm{M} \mathfrak{V} Q^{-1} = 0,$$

ou enfin, en posant $\mathfrak{V} Q^{-1} = \mathrm{L}$,

$$\Sigma \mathrm{F} \mathfrak{S} \mathrm{MX} = \Sigma \mathrm{M} \mathfrak{S} \mathrm{FX} = \Phi_1 \mathrm{X},$$

$$(5) \qquad \Phi_1 \mathrm{L} = 0.$$

Il est facile de voir que l'équation (4) n'est qu'une conséquence de l'équation (5); donc, en résumé, les conditions pour l'équilibre astatique autour du point pris pour origine sont

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma F = 0, \\ \Phi_1 L = 0. \end{cases}$$

La fonction $\Phi_1 X$ est évidemment une fonction linéaire conjuguée à elle-même.

L'équation (4) montre que, dans le cas de l'équilibre astatique, le quaternion ΣFM, auquel Hamilton a donné le nom de *tension totale du système des forces*, est nul dans toutes les positions du corps.

Il est facile de voir maintenant que, si les équations de condition (6) sont satisfaites, le corps restera en équilibre dans toutes les positions qu'il peut prendre.

Si l'on choisit en effet pour origine un nouveau point C, les forces F ne changent pas, et l'on a toujours $R = 0$; mais leurs points d'application deviennent

$$N = M - C, \quad N_1 = M_1 - C, \quad \ldots,$$

et l'on aura

$$(7)\qquad \Sigma F \mathfrak{S} NL = \Sigma F \mathfrak{S}(M - C)L = \Sigma F \mathfrak{S} ML - \Sigma F \mathfrak{S} CL$$

ou enfin

$$\Sigma F \mathfrak{S} NL = 0,$$

en vertu des équations (6). Donc les conditions de l'équilibre astatique sont ainsi satisfaites pour la nouvelle origine.

L'équation (7) montre que la fonction Φ_1 reste la même, quelle que soit l'origine, toutes les fois que la résultante générale des forces est nulle.

L'équation de condition

$$\Phi_1 L = 0$$

sera satisfaite pour tout vecteur L si elle l'est pour trois vecteurs non coplanaires, par exemple pour trois vecteurs unitaires I_1, I_2, I_3; elle

équivaut donc aux trois équations

$$(8) \qquad \Phi_1 \mathrm{I}_1 = 0, \quad \Phi_1 \mathrm{I}_2 = 0, \quad \Phi_1 \mathrm{I}_3 = 0.$$

Chacune des équations ci-dessus équivaut à trois équations algébriques ordinaires; l'équation

$$\mathrm{R} = 0$$

équivaut de même à trois équations ordinaires. Donc, enfin, les conditions (6) constituent un groupe de douze équations algébriques ordinaires, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre astatique.

Des différentes positions dans lesquelles un corps fixé par un point et soumis à l'action de n forces de grandeurs et de directions constantes peut être en équilibre.

Supposons maintenant le corps fixé par un point sans être en équilibre dans sa position initiale, et cherchons les positions dans lesquelles il sera en équilibre.

Supposons que, par une rotation autour d'un axe passant par l'origine, on ait amené le corps dans une situation telle que les vecteurs des points d'application des forces soient $\mathrm{N}, \mathrm{N}_1, \ldots$. Les conditions de l'équilibre seront exprimées par

$$\Sigma \mathfrak{V}_{\mathrm{NF}} = 0,$$

ou bien

$$\Sigma \mathfrak{V}(\mathrm{I}_1 \mathfrak{S}_{\mathrm{NI}_1} + \mathrm{I}_2 \mathfrak{S}_{\mathrm{NI}_2} + \mathrm{I}_3 \mathfrak{S}_{\mathrm{NI}_3})_{\mathrm{F}} = 0,$$

ou encore

$$(9) \qquad \mathfrak{V}_{\mathrm{I}_1} \Phi_{\mathrm{I}_1} + \mathfrak{V}_{\mathrm{I}_2} \Phi_{\mathrm{I}_2} + \mathfrak{V}_{\mathrm{I}_3} \Phi_{\mathrm{I}_3} = 0,$$

en posant

$$\Phi_{\mathrm{X}} = \Sigma_{\mathrm{F}} \mathfrak{S}_{\mathrm{NX}}.$$

La fonction Φ_{X} a la même forme que la fonction $\Phi_1 \mathrm{X}$ des paragraphes

précédents, mais, en général, elle n'est pas conjuguée à elle-même; l'équation (9) exprime que, pour l'équilibre, cette fonction doit être conjuguée à elle-même, et la réciproque est évidente.

Le problème revient donc à trouver un quaternion unitaire Q tel qu'on ait

$$\Sigma F \mathfrak{S} Q^{-1} M Q x = \Psi x,$$

Ψ étant une fonction conjuguée à elle-même.

Soit

$$(10) \qquad \Phi x = \Sigma F \mathfrak{S} M x = \Psi Q^{-1} x Q.$$

On a

$$\Phi' x = \Sigma M \mathfrak{S} F x$$

Mais Ψx, étant une fonction vectorielle conjuguée à elle-même, doit être égale à ce que devient Φx après la rotation du corps; donc on a

$$(11) \qquad \Psi x = \Sigma Q^{-1} M Q \mathfrak{S} F x = Q^{-1} \Phi' x Q.$$

Des équations (10) et (11) on tire

$$(12) \qquad \Phi \Phi' x = \Psi^2 x,$$

ce qui détermine Ψ.

Voici comment M. Tait résout cette équation.

Soit

$$(13) \qquad \Psi^3 + G \Psi^2 + G_1 \Psi + G_2 = 0$$

l'équation cubique symbolique à laquelle satisfait identiquement la fonction Ψ. Si l'on connaissait les coefficients G, G_1, G_2 de cette équation, la fonction Ψ serait elle-même déterminée.

Posons

$$\Psi^2 = \Phi \Phi' = \Omega;$$

l'équation (13) pourra se mettre sous la forme

$$(\Psi + G)\Omega + (G_1\Psi + G_2) = 0$$

ou bien

$$\Psi(\Omega + G_1) = -(G\Omega + G_2),$$

d'où

$$\Omega(\Omega + G_1)^2 = (G\Omega + G_2)$$

ou enfin

$$(14) \qquad \Omega^3 + (2G_1 - G_2)\Omega^2 + (G_1^2 - 2GG_2)\Omega - G_2^2 = 0.$$

Mais Ω est une fonction conjuguée à elle-même qui satisfait à une équation connue

$$(15) \qquad \Omega^3 + M\Omega^2 + M_1\Omega + M_2 = 0.$$

En identifiant les équations (14) et (15), il vient

$$2G_1 - G_2 = M,$$
$$G_1^2 - 2GG_2 = M_1,$$
$$G_2^2 = -M_2.$$

La seconde équation donne

$$G = \frac{G_1^2 - M_1}{2G_2}.$$

En portant cette valeur de G dans la première et remplaçant G_2^2 par sa valeur $-M_2$, il vient

$$2G_1 = M - \frac{(G_1^2 - M_1)^2}{4M_2},$$

équation du quatrième degré en G_1. L'équation (12) a donc quatre solutions.

Soient Ψx l'une d'elles, $\imath_1$, $\imath_2$ et $\imath_3$ les vecteurs unitaires principaux de cette fonction; les trois autres solutions seront

$$\imath_1{}^{\iota}\Psi x\imath_1, \quad \imath_2{}^{\iota}\Psi x\imath_2, \quad \imath_3{}^{\iota}\Psi x\imath_3.$$

On a en effet, N, N_1, ... étant les points d'application des forces après la rotation qui a donné Ψ,

$$\Psi x = \Sigma F \mathbf{S} N x = \Sigma N \mathbf{S} F x.$$

Si l'on fait subir au corps la rotation $\iota_1^{-1}(\ )\iota_1$, on aura une nouvelle fonction $\Psi_1 x$, déterminée par l'équation

$$\Psi_1 x = \Sigma \iota_1^{-1} N \iota_1 \mathbf{S} F x = \iota_1^{-1} \Psi x \iota_1.$$

Or $\iota_1^{-1} \Psi x \iota_1$ est une fonction conjuguée à elle-même qui a les mêmes directions principales que Ψx. Si l'on a, par exemple,

$$\Psi x = A_1 \iota_1 \mathbf{S} \iota_1 x + A_2 \iota_2 \mathbf{S} \iota_2 x + A_3 \iota_3 \mathbf{S} \iota_3 x,$$

on aura

$$\iota_1^{-1} \Psi x \iota_1 = A_1 \iota_1 \mathbf{S} \iota_1 x - A_2 \iota_2 \mathbf{S} \iota_2 x - A_3 \iota_3 \mathbf{S} \iota_3 x.$$

Donc, enfin, il y a quatre positions d'équilibre. L'une d'elles étant donnée, on obtient les trois autres par des rotations de 180° ou des *renversements*, autour des axes principaux, de la fonction Ψ ou $\Phi\Phi'$ dans la position donnée.

Il reste maintenant, pour compléter la solution du problème, à déterminer le quaternion unitaire Q.

On a, d'après l'équation (11),

$$Q \Psi x = \Phi' x Q,$$

quel que soit x, ou bien

$$(\mathbf{S} Q + \mathbf{V} Q) \Psi x = \Phi' x (\mathbf{S} Q + \mathbf{V} Q),$$

et l'on a, en prenant la partie algébrique de cette équation,

$$\mathbf{S} \mathbf{V} Q \Psi x = \mathbf{S} \Phi' x \mathbf{V} Q, \tag{16}$$

ou bien

$$\mathbf{S} x \Psi \mathbf{V} Q = \mathbf{S} x \Phi \mathbf{V} Q,$$

ou enfin

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{x}(\Psi - \Phi)\mathfrak{V}Q = 0.$$

Cette équation, devant être satisfaite quel que soit x, exige qu'on ait

$$(\Psi - \Phi)\mathfrak{V}Q = 0.$$

La fonction linéaire vectorielle $(\Psi - \Phi)\mathrm{x}$ est donc binaire et de la forme

$$\mathrm{B}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\,\mathrm{x} + \mathrm{B}_1\,\mathfrak{S}\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{x};$$

et l'on a

$$\mathfrak{V}Q = \mathfrak{V}\,\mathrm{A}\mathrm{A}_1.$$

L'équation (16) permet aussi d'écrire

$$\mathfrak{V}Q = \mathfrak{V}(\Psi - \Phi')\mathrm{A}(\Psi - \Phi')\mathrm{B},$$

A et B étant deux vecteurs quelconques.

Les résultats qui précèdent peuvent être énoncés de la manière suivante :

Étant donné un système de forces appliquées à un corps solide, il existe quatre positions du corps pour lesquelles le système des forces se réduit à une résultante passant en un point donné.

Comme cas particulier, si les forces ont une résultante générale nulle, la fonction $\Phi\mathrm{x}$ est la même, ainsi que nous l'avons remarqué ci-dessus, quel que soit le point pris pour origine. Il en est de même, par suite, des fonctions $\Phi\Phi'$ et Ψ^2, et l'on voit que la position du corps qui correspond à l'équilibre est la même, quelle que soit l'origine des vecteurs. Donc, si les forces données ont une résultante générale nulle, il y a quatre orientations du corps pour lesquelles elles se font équilibre.

Diverses réductions du système des forces. — Interprétation de la fonction $\Phi\mathrm{X}$.

L'axe du couple résultant du système des forces pour l'origine est

$$\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{FM};$$

mais, si I_1, I_2 et I_3 sont trois orienteurs rectangulaires, on a

$$\mathrm{M} = \mathrm{I}_1\mathfrak{S}\mathrm{MI}_1 + \mathrm{I}_2\mathfrak{S}\mathrm{MI}_2 + \mathrm{I}_3\mathfrak{S}\mathrm{MI}_3 \quad (^1),$$

et par suite

$$\begin{aligned}\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{FM} &= \Sigma\mathfrak{S}\mathrm{MI}_1\mathfrak{V}\mathrm{MI}_1 + \Sigma\mathfrak{S}\mathrm{MI}_2\mathfrak{V}\mathrm{MI}_2 + \Sigma\mathfrak{S}\mathrm{MI}_3\mathfrak{V}\mathrm{MI}_3\\ &= \mathfrak{V}\Phi\mathrm{I}_1\mathrm{I}_1 + \mathfrak{V}\Phi\mathrm{I}_2\mathrm{I}_2 + \mathfrak{V}\Phi\mathrm{I}_3\mathrm{I}_3,\end{aligned}$$

et l'on voit que le couple résultant est remplacé par trois autres, dont le premier $\mathfrak{V}\Phi\mathrm{I}_1\mathrm{I}_1$ peut être regardé comme produit par une force $\Phi\mathrm{I}_1$ appliquée à l'extrémité du vecteur unitaire I_1, et de même pour les autres.

La fonction linéaire Φ étant entièrement indépendante du trièdre $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3)$ choisi, la réduction précédente est unique et déterminée. Ainsi, dans le système de réduction considéré, la force appliquée à l'extrémité d'un vecteur unitaire L est $\Phi\mathrm{L}$. Pour l'équilibre astatique, cette force doit être nulle pour un vecteur unitaire quelconque.

Cherchons s'il est possible de trouver un système de vecteurs unitaires rectangulaires A, B, C tel que les forces correspondantes $\Phi\mathrm{A}$, $\Phi\mathrm{B}$ et $\Phi\mathrm{C}$ soient aussi rectangulaires.

(1) On voit que nous donnons son véritable signe à l'expression $\mathfrak{S}\mathrm{AB}$, qu'on peut appeler le *produit projectif* des deux vecteurs A et B, et qui est définie par l'équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathfrak{T}\mathrm{A}\,\mathfrak{T}\mathrm{B}\cos(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

On devra avoir en même temps

$$(17) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{BC} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{CA} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{AB} = 0$$

et

$$\mathfrak{S}\Phi\mathrm{B}\,\Phi\mathrm{C} = 0, \quad \mathfrak{S}\Phi\mathrm{C}\,\Phi\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\Phi\mathrm{A}\,\Phi\mathrm{B} = 0,$$

ou bien

$$(18) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{B}\,\Phi'\Phi\mathrm{C} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{C}\,\Phi'\Phi\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{A}\,\Phi'\Phi\mathrm{B} = 0.$$

Les équations (17) et (18) montrent que le système que nous cherchons est unique et déterminé, et que les vecteurs unitaires A, B, C sont les vecteurs unitaires principaux de la fonction $\Phi'\Phi x$, c'est-à-dire qu'ils sont dirigés suivant les axes de l'ellipsoïde

$$(19) \qquad \mathfrak{S}x\,\Phi'\Phi x = 1,$$

que M. Darboux appelle l'*ellipsoïde central* du système pour l'origine choisie.

Comme on peut toujours, par une rotation convenable, faire coïncider deux trièdres trirectangles ayant le même sommet, on voit qu'on pourra, par une rotation convenable du corps, amener les bras A, B, C des couples principaux à coïncider avec les directions correspondantes $\Phi\mathrm{A}$, $\Phi\mathrm{B}$, $\Phi\mathrm{C}$, et par suite les couples à se détruire. Cette position du corps obtenue, on en obtiendra trois autres semblables par des renversements autour des trois bras; nous retrouvons ainsi l'un des résultats qui précèdent.

L'ellipsoïde central dont il vient d'être question peut être construit en portant sur chaque vecteur unitaire L une longueur égale à l'inverse de l'intensité de la force correspondante $\Phi\mathrm{L}$. On a, en effet, pour le point obtenu ainsi,

$$x = \frac{\mathfrak{U}x}{\mathfrak{T}\Phi\mathfrak{U}x},$$

ou bien

$$\mathfrak{T}^2\Phi x = 1,$$

ou enfin

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\,\Phi'\Phi\mathrm{x} = 1,$$

équation de l'ellipsoïde central.

On peut encore regarder cet ellipsoïde comme le lieu de l'extrémité du vecteur $\Phi^{-1}\mathrm{L}$, car on a pour ce point

$$\mathrm{x} = \Phi^{-1}\mathfrak{U}\mathrm{x},$$
$$\Phi\mathrm{x} = \mathfrak{U}\mathrm{x},$$

ce qui donne encore

$$\mathfrak{T}^2\Phi\mathrm{x} = \mathfrak{S}\mathrm{x}\,\Phi'\Phi\mathrm{x} = 1.$$

M. Darboux a encore considéré un ellipsoïde lieu des vecteurs-forces menés par l'origine. Si x est l'extrémité du vecteur correspondant au vecteur unitaire L, on a successivement

$$\mathrm{x} = \Phi\mathrm{L},$$
$$\Phi^{-1}\mathrm{x} = \mathrm{L},$$
$$\mathfrak{T}^2\Phi^{-1}\mathrm{x} = 1$$

ou enfin

$$(19) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{x}\,\Phi'^{-1}\Phi^{-1}\mathrm{x} = 1.$$

On reconnaît sans peine que cet ellipsoïde est égal à l'ellipsoïde réciproque de l'ellipsoïde central, dont il ne diffère que par l'orientation. Les directions des forces de deux couples de bras rectangulaires sont conjuguées par rapport à cet ellipsoïde.

Si, par une rotation convenable autour de l'origine, on a amené le corps dans une situation telle que le système des forces se réduise à une résultante unique, la fonction Φ est conjuguée à elle-même; on a donc $\Phi' = \Phi$, $\Phi'\Phi = \Phi\Phi' = \Phi^2$. L'ellipsoïde central a pour équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\,\Phi^2\mathrm{x} = 1$$

et l'ellipsoïde des forces

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\,\Phi^{-2}\mathrm{x} = 1;$$

ils sont polaires réciproques par rapport à la sphère dont le rayon est égal à l'unité.

Dans ce cas, mais dans ce cas seulement, les directions des forces sont les normales à un troisième ellipsoïde ayant pour équation

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\,\Phi\mathrm{x} = 1.$$

Dans le système de réduction des forces que nous venons d'étudier, on décompose le couple résultant en trois autres dont les bras sont perpendiculaires et les axes situés dans un même plan. Nous allons examiner maintenant un nouveau mode de réduction dans lequel les bras des couples sont situés dans un même plan et les forces correspondantes rectangulaires.

Projetons d'abord chacune des forces sur une parallèle à un vecteur unitaire quelconque L mené par son point d'application. Les forces projetées seront

$$\mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FL},\quad \mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{F_1L},\quad \ldots,$$

et leur résultante, qui est égale à leur somme, sera

$$\mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\Sigma\,\mathrm{FL} = \mathrm{L}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{RL}.$$

Je dis que le centre de ces forces parallèles est situé dans un plan fixe du corps.

On a en effet, en appelant x le vecteur de ce point,

$$(19\,bis)\qquad \mathrm{x}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{RL} = \Sigma\,\mathrm{M}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FL} = \Phi'\mathrm{L},$$

d'où

$$\mathrm{L} = \mathfrak{S}\,\mathrm{RL}\,\Phi'^{-1}\mathrm{x},$$

et, en opérant avec $\mathfrak{S}\,\mathrm{Rx}$,

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{R}\,\Phi'^{-1}\mathrm{x} = 1,$$

ou enfin

$$(20) \qquad \mathbf{S}\,\iota\,\Phi'^{-1}\,\iota = 1 \quad {}^{(1)},$$

équation d'un plan auquel Hamilton a donné le nom de *plan central*.

Si l'on projette les forces sur la direction de leur résultante générale, le point obtenu ainsi s'appelle le *point central* du système des forces, et il a pour vecteur

$$(21) \qquad \mathrm{G} = \frac{\Sigma\, \mathrm{M}\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\, \mathbf{U}\, \mathrm{R}}{\mathbf{S}\, \mathrm{R}\, \mathbf{U}\, \mathrm{R}} = \frac{\Phi'\, \mathrm{R}}{\mathbf{T}\, \mathrm{R}}.$$

Le point central est évidemment situé dans le plan central, et l'équation (21) montre que, si on le prend pour origine, la fonction Φ' s'annule pour la valeur R du vecteur. Nous reviendrons plus loin sur cette remarque importante.

D'après ce qui précède, on voit que, en décomposant les forces suivant trois directions rectangulaires ι_1, ι_2, ι_3, le système entier se trouvera réduit à trois forces, dont les points d'application, indépendants de la position du corps, seront trois points du plan central, savoir :

1° Une force $\iota_1\, \mathbf{S}\, \mathrm{R}\iota_1$ appliquée au point $\frac{\Phi'\iota_1}{\mathbf{S}\,\mathrm{R}\iota_1}$;

2° Une force $\iota_2\, \mathbf{S}\, \mathrm{R}\iota_2$ appliquée au point $\frac{\Phi'\iota_2}{\mathbf{S}\,\mathrm{R}\iota_2}$;

3° Une force $\iota_3\, \mathbf{S}\, \mathrm{R}\iota_3$ appliquée au point $\frac{\Phi'\iota_3}{\mathbf{S}\,\mathrm{R}\iota_3}$.

On aurait pu arriver immédiatement à ce résultat en remarquant qu'on a

$$\mathrm{F} = \iota_1\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_1 + \iota_2\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_2 + \iota_3\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_3,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \Sigma\, \mathbf{V}\, \mathrm{F}\mathrm{M} &= \Sigma\, \mathbf{V}(\iota_1\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_1 + \iota_2\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_2 + \iota_3\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_3)\mathrm{M} \\ &= \Sigma\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_1\, \mathbf{V}\, \iota_1\mathrm{M} + \Sigma\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_2\, \mathbf{V}\, \iota_2\mathrm{M} + \Sigma\, \mathbf{S}\, \mathrm{F}\iota_3\, \mathbf{V}\, \iota_3\mathrm{M} \\ &= \mathbf{V}\, \iota_1\, \Phi'\iota_1 + \mathbf{V}\, \iota_2\, \Phi'\iota_2 + \mathbf{V}\, \iota_3\, \Phi'\iota_3. \end{aligned}$$

---

(1) On reconnaît facilement que la fonction Φ'^{-1} a pour réciproque Φ^{-1}. Soit, en effet, $\Phi'^{-1} = \Psi$; on aura $\Phi'\Psi = 1$, et par suite, pour la fonction conjuguée, $\Psi'\Phi = 1$, d'où $\Psi' = \Phi^{-1}$.

Le couple composant, qui a pour axe $\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\Phi'\mathrm{I}_1$, peut être regardé comme constitué par une force I_1 appliquée au point $\Phi'\mathrm{I}_1$, ou, ce qui est la même chose (si $\mathfrak{S}\mathrm{I}_1\mathrm{R}$ est différent de zéro), par une force $\mathrm{I}_1\mathfrak{S}\mathrm{RI}_1$ appliquée au bras $\frac{\Phi'\mathrm{I}_1}{\mathfrak{S}\mathrm{RI}_1}$, et de même pour les deux autres couples. Nous retrouvons ainsi la même réduction que ci-dessus.

Si l'on a $\mathfrak{S}\mathrm{RI}_1 = 0$, c'est-à-dire si l'on prend les composantes des forces sur un vecteur unitaire normal à la résultante générale, elles n'auront plus de résultante unique et se réduiront à un couple $\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\Phi'\mathrm{I}_1$, dont le bras $\Phi'\mathrm{I}_1$ est parallèle au plan central. On a, en effet,

$$\mathfrak{S}\Phi^{-1}\mathrm{R}\Phi'\mathrm{I}_1 = \mathfrak{S}\mathrm{R}\Phi'^{-1}\Phi'\mathrm{I}_1 = \mathfrak{S}\mathrm{RI}_1 = 0.$$

Nous allons enfin étudier la réduction du système des forces à quatre forces appliquées aux sommets d'un tétraèdre quelconque.

Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre donné. Une force F, appliquée au point M, peut être remplacée par une force égale et parallèle appliquée au point D et par le couple $\mathfrak{V}\mathrm{F}(\mathrm{M}-\mathrm{D})$. Le système de toutes les forces pourra donc être remplacé par une force R appliquée au point D et par le couple résultant $\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{F}(\mathrm{M}-\mathrm{D})$.

Or on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})\\ = (\mathrm{A}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) + (\mathrm{B}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})(\mathrm{A}-\mathrm{D})\\ + (\mathrm{C}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D}),\end{aligned}$$

et l'on voit que le couple résultant pourra être remplacé par trois autres, dont l'un,

$$\frac{\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{F}(\mathrm{A}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}{\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})},$$

pourra être regardé comme ayant pour bras $\mathrm{A}-\mathrm{D}$ et pour force

$$\mathrm{F}_a = \frac{\Sigma\mathrm{F}\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}{\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}.$$

Nous aurons ainsi réduit le système à sept forces, dont quatre appliquées au point D et les trois autres aux autres sommets du tétraèdre. En remplaçant enfin les quatre forces qui agissent au point D par leur résultante, on aura réduit le système à quatre forces appliquées aux sommets du tétraèdre donné.

Soient a l'aire de la face du tétraèdre de référence opposée au point A, A_1 le vecteur unitaire normal à cette face et V le volume du tétraèdre donné; on aura

$$\mathfrak{V}(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) = 2a\mathrm{A}_1,$$
$$\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) = 6\mathrm{V},$$

et, par suite, l'expression de la force qui agit au point A peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{F}_a = \frac{2a\Phi\mathrm{A}_1 - \mathrm{R}\,\mathfrak{S}\mathrm{BCD}}{6\mathrm{V}},$$

et l'on reconnaît immédiatement que la direction de la force en un sommet quelconque du tétraèdre ne varie pas avec ce sommet quand la face opposée reste fixe.

Ellipsoïde central du point central. — Ellipsoïde central pour les divers points du corps. — Conique centrale.

Nous allons maintenant revenir à l'étude de l'ellipsoïde central, qui a servi à M. Darboux dans la plus grande partie de ses recherches.

Nous avons vu précédemment que, si l'on prend le point central pour origine, la fonction $\Phi\mathrm{x}$ s'annule pour $\mathrm{x} = \mathrm{R}$; cette fonction peut donc se réduire à une fonction à deux termes, qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même. Mais, comme dans le cas d'une origine quelconque, étudié précédemment, on peut la rendre telle en faisant tourner le corps d'un angle déterminé autour d'un axe convenablement choisi. Dans le cas particulier qui nous occupe, l'équation (11) devient

$$\Phi\mathrm{x} = Q^{-1}\Phi'\mathrm{x}Q. \tag{22}$$

et elle montre, ce qui était évident, que la fonction Φx s'annule, comme la fonction Φ', pour $x = \mathrm{R}$. On voit d'ailleurs sans difficulté que l'équation

$$\Phi^2 = \Phi\Phi'$$

n'a que deux solutions, dont l'une se déduit de l'autre par une rotation de 180° autour de R.

Si l'on pose, en effet,

$$(23) \qquad \Phi^2 x = \Phi'\Phi x = a_1^2 \iota_1 \mathfrak{S}\iota_1 x + a_2^2 \iota_2 \mathfrak{S}\iota_2 x,$$

les valeurs de Φ qui conviennent à la question seront

$$\Phi_1 x = a_1 \iota_1 \mathfrak{S}\iota_1 x + a_2 \iota_2 \mathfrak{S}\iota_2 x,$$
$$\Phi_2 x = \kappa^{-1}\Phi_1 x \kappa = -a_1 \iota_1 \mathfrak{S}\iota_1 x - a_2 \iota_2 \mathfrak{S}\iota_2 x,$$

en posant

$$\kappa = \mathfrak{V}\iota_1\iota_2 = \mathfrak{U}\mathrm{R},$$

ou bien

$$\Phi_1 x = a_1 \iota_1 \mathfrak{S}\iota_1 x - a_2 \iota_2 \mathfrak{S}\iota_2 x,$$
$$\Phi_2 x = \kappa^{-1}\Phi x \kappa = -a_1 \iota_1 \mathfrak{S}\iota_1 x + a_2 \iota_2 \mathfrak{S}\iota_2 x.$$

L'ellipsoïde central du point central se réduit, en conséquence, à un cylindre parallèle à R et dont l'équation est

$$\mathfrak{S} x \Phi\Phi' x = 1 \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{S} x \Phi^2 x = 1,$$

ou enfin

$$(24) \qquad a_1^2 (\mathfrak{S}\iota_1 x)^2 + a_2^2 (\mathfrak{S}\iota_2 x)^2 = 1.$$

Le vecteur x du centre des composantes des forces parallèles à un vecteur unitaire L a pour expression

$$x = \frac{\Phi \mathrm{L}}{\mathfrak{S}\mathrm{RL}},$$

et l'on voit que le lieu de ce point, c'est-à-dire le plan central, a pour

équation

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\mathrm{R} = 0.$$

Ainsi, dans cette position du corps, le plan central est le plan de la section droite du cylindre (24) menée par le point central.

Cherchons maintenant l'ellipsoïde central pour un autre point P. La fonction $\Phi\mathrm{X}$ relative à ce point sera

$$(25)\qquad \Phi\mathrm{X} = \Sigma\,\mathrm{F}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{M}(\mathrm{P}-\mathrm{X}) = \Phi\mathrm{X} - \mathrm{R}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{X},$$

et l'on aura

$$(\Phi\mathrm{X})^2 = \mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Phi^2\mathrm{X} + (\mathfrak{T}\,\mathrm{R})^2(\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{X})^2,$$

puisque

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{R}\,\Phi\mathrm{X} = \mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Phi\mathrm{R} = 0.$$

Donc l'équation de l'ellipsoïde central pour le point considéré sera

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Phi^2\mathrm{X} + (\mathfrak{T}\,\mathrm{R})^2(\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{X})^2 = 1$$

ou bien

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{X}\,\Psi\mathrm{X} = 1,$$

en posant

$$\Psi\mathrm{X} = \Phi^2\mathrm{X} + \mathrm{P}(\mathfrak{T}\,\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{X}.$$

Cherchons les vecteurs unitaires principaux et les longueurs des axes de cet ellipsoïde.

Soit L l'un des vecteurs unitaires principaux; on aura

$$(26)\qquad \Phi^2\mathrm{L} + \mathrm{P}(\mathfrak{T}\,\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{L} = l\mathrm{L}$$

ou bien

$$(\Phi^2 - l)\mathrm{L} = -\mathrm{P}(\mathfrak{T}\,\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{L},$$

d'où

$$(27)\qquad \mathrm{L} = -(\mathfrak{T}\,\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\mathrm{L}\,(\Phi^2 - l)^{-1}\mathrm{P}.$$

Pour éliminer L, opérons par $\mathfrak{S}P\times$, et nous aurons, en supprimant le facteur $\mathfrak{S}PL$,

$$(28)\qquad (\mathfrak{T}R)^2\mathfrak{S}P(\Phi^2-l)^{-1}P=-1,$$

équation du troisième degré en l.

Le terme tout connu de cette équation est égal à $\mathfrak{S}\Psi A\Psi B\Psi C$, A, B, C étant trois vecteurs unitaires rectangulaires quelconques. Si l'on suppose que A, B, C soient les vecteurs unitaires principaux I_1, I_2, I_3 du cylindre central du point central, on aura

$$\begin{aligned}\Psi I_1&=(a_1^2I_1+P)(\mathfrak{T}R)^2\mathfrak{S}I_1P,\\ \Psi I_2&=(a_2^2I_2+P)(\mathfrak{T}R)^2\mathfrak{S}I_2P,\\ \Psi I_3&=(P)(\mathfrak{T}R)^2\mathfrak{S}I_3P,\end{aligned}$$

et l'on trouve sans difficulté

$$M=\mathfrak{S}\Psi I_1\Psi I_2\Psi I_3=(a_1^2a_2^2)(\mathfrak{T}R)^2(\mathfrak{S}I_3P)^2.$$

Cette équation montre que le produit des axes de l'ellipsoïde central d'un point quelconque est égal au produit des axes de la section droite du cylindre central, divisé par le produit de l'intensité de la résultante et par la distance du point donné au plan central.

Ainsi, le produit des axes est le même pour tous les points qui sont situés à la même distance du point central. Ce produit est infini pour un point du plan central, de sorte que pour tout point central l'ellipsoïde central est un cylindre : c'est ce qu'on aurait pu voir de suite en remarquant que pour un point du plan central on a (25)

$$\Phi R=(\Phi-R)R=(\mathfrak{S}PR)=0.$$

Soit l l'une des racines de l'équation (28), et considérons la quadrique qui a pour équation

$$(29)\qquad (\mathfrak{T}R)^2\mathfrak{S}X(\Phi^2-l)^{-1}X=-1.$$

On voit que cette surface passe au point P, en vertu de l'équation (28), et sa normale en ce point est

$$(\Phi^2 - l)^{-1} P;$$

elle est donc parallèle à L (27).

Donc, si nous appelons *couples principaux* de chaque point du corps ceux dont les bras et les forces constituent deux systèmes de directions rectangulaires, axes principaux les bras de ces couples, on voit que les axes principaux sont les normales aux trois surfaces d'un système de quadriques homofocales qui passent par le point donné.

L'équation (29) développée est

$$\frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_1)^2}{l - a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_2)^2}{l - a_2^2} + \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_3)^2}{l} - \frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2} = 0.$$

La conique située dans le plan central qui fait partie du système de surfaces a donc pour équation

$$\frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_1)^2}{a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_2)^2}{a_2^2} + \frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2} = 0.$$

C'est une ellipse imaginaire que M. Darboux appelle la *conique centrale* du système.

Les deux autres coniques focales du système ont pour équations

$$(30) \qquad \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_1)^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_3)^2}{a_2^2} - \frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2} = 0,$$

$$(31) \qquad \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_2)^2}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{(\mathfrak{S}\mathrm{XI}_3)^2}{a_1^2} - \frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2} = 0;$$

ce sont les *focales* de Minding.

Théorème de Minding.

Nous allons enfin démontrer le théorème de Minding, qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans toutes les positions du corps où les forces se réduisent à une résultante unique, les lignes d'action de ces résultantes vont toujours rencontrer les deux courbes définies ci-dessus sous le nom de focales de Minding.

Prenons le corps dans l'une de ses situations d'équilibre par rapport au point central. Le système des forces se réduit alors à la résultante générale $\mathrm{R} = \mathfrak{T}\mathrm{R}\mathrm{I}_3$, à un couple dont la force $a_1\mathrm{I}_1$ est appliquée à l'extrémité du vecteur unitaire I_1 et à un couple dont la force $a_2\mathrm{I}_2$ est appliquée à l'extrémité de I_2.

Nous allons chercher quelle est la rotation à faire subir au corps pour que le système se réduise à une résultante unique, appliquée en un point quelconque P. Soit $Q^{-1}\ \ Q$ l'opérateur qui représente cette rotation : en faisant d'abord tourner le corps, le système se réduira à la résultante générale R, à un couple de forces $a_1\mathrm{I}_1$ appliqué au point $Q^{-1}\mathrm{I}_1 Q$ ou I'_1, et à un couple dont la force $a_2\mathrm{I}_2$ est appliquée au point $Q^{-1}\mathrm{I}_2 Q$ ou I'_2. La somme des moments des forces pour l'origine sera donc

$$a_1\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\mathrm{I}'_1 + a_2\mathfrak{V}\mathrm{I}_2\mathrm{I}'_2.$$

et, pour un autre point quelconque P, elle sera

$$a_1\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\mathrm{I}'_1 + a_2\mathfrak{V}\mathrm{I}_2\mathrm{I}'_2 - \mathfrak{V}\mathrm{RP}.$$

Pour que, dans la nouvelle position du corps, le système se réduise à une résultante unique appliquée au point P, il faudra qu'on ait

$$(32) \qquad a_1\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\mathrm{I}'_1 + a_2\mathfrak{V}\mathrm{I}_2\mathrm{I}'_2 - \mathfrak{V}\mathrm{RP} = 0,$$

ou, en opérant successivement par $\mathfrak{S}\iota'_1$, $\mathfrak{S}\iota'_2$, $\mathfrak{S}\iota'_3$,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} a_2\mathfrak{S}\iota'_3\iota_2 + \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\rho\iota'_1 &= 0,\\ a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1 - \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\rho\iota'_2 &= 0,\\ a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2 - a_2\mathfrak{S}\iota_2\iota'_1 + \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\rho\iota'_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations suffisent pour déterminer le quaternion unitaire Q. On peut en déduire très simplement l'équation

$$(34)\qquad a_1\mathfrak{S}\iota'_1\iota_2 - a_2\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2 = 0,$$

qu'on obtient d'ailleurs immédiatement en opérant sur l'équation (32).

Si, dans les équations (33), nous remplaçons ρ par x, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3 x\iota'_1 &= -a_2\mathfrak{S}\iota'_3\iota_2,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3 x\iota'_2 &= a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3 x\iota'_3 &= a_2\mathfrak{S}\iota_2\iota'_1 - a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2, \end{aligned}$$

équations de trois plans dont l'intersection commune est évidemment l'une des résultantes uniques lorsqu'on y remplace Q par l'une des valeurs tirées des équations (33). Cherchons l'intersection de cette droite avec le plan

$$(35)\qquad \mathfrak{S}x\iota'_1 = 0,$$

qui est, dans la nouvelle situation du corps, le plan de l'une des focales de Minding.

Les deux dernières équations ci-dessus peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\mathfrak{V}\iota_3 x\mathfrak{V}\iota'_3\iota'_1 &= -a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_2,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{V}\iota_3 x\mathfrak{V}\iota'_1\iota'_2 &= a_2\mathfrak{S}\iota'_1\iota_2 - a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2, \end{aligned}$$

ou, en développant et tenant compte de l'équation (35),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\iota'_1\,\mathfrak{S}x\iota'_3 &= a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\iota'_1\,\mathfrak{S}x\iota'_2 &= a_2\mathfrak{S}\iota'_1\iota_2 - a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2, \end{aligned}$$

ou, en élevant au carré et tenant compte de l'équation (34),

$$\mathfrak{T}R^2\,\mathfrak{S}\iota_3\iota'_1{}^2\,\mathfrak{S}\alpha\iota'_3{}^2 = a_1^2\,\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1{}^2,$$
$$\mathfrak{T}R^2\,\mathfrak{S}\iota_3\iota'_1{}^2\,\mathfrak{S}\alpha\iota'_2{}^2 = a_1^2 - a_2^2\,\left[\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2{}^2 - \mathfrak{S}\iota'_1\iota_2{}^2\right],$$

d'où enfin

$$\frac{(\mathfrak{S}\alpha\iota'_3)^2}{a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\alpha\iota'_2)^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{1}{(\mathfrak{T}R)^2} = 0,$$

équation de la focale (31).

On démontrerait de même que les résultantes uniques rencontrent toutes la focale située dans le plan

$$\mathfrak{S}\alpha\iota'_3 = 0.$$

Enfin, on voit sans peine que les plans tangents aux focales aux deux points où elles sont coupées par une droite sont rectangulaires.

Sur les surfaces osculatrices

PAR LE P. PEPIN, S. J.

1. On sait qu'il n'est pas toujours possible de déterminer les coefficients de l'équation générale d'ordre donné m à trois variables de manière à rendre la surface représentée par cette équation osculatrice en un point arbitraire d'une autre surface. Les seules équations que l'on connaisse propres à représenter des surfaces osculatrices sont celles du premier et du cinquième ordre. On peut, en chaque point d'une surface donnée quelconque, déterminer soit un plan osculateur, soit une surface osculatrice du cinquième ordre. Mais ces surfaces sont-elles les seules que l'on puisse rendre osculatrices? La solution de cette question se ramène à celle d'une équation indéterminée du troisième ordre à deux variables. C'est cette équation que je me propose d'étudier. Quoiqu'elle ne semble pas susceptible d'être complètement résolue, qu'on ne puisse assigner aucune limite au delà de laquelle on soit assuré qu'elle n'admette plus de solution, on peut établir sur les nombres propres à la vérifier des théorèmes intéressants; on peut même trouver toutes les solutions possibles, en nombres inférieurs à une limite assignée.

2. M. Hermite définit de la manière suivante les surfaces osculatrices (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 144) :

« Une surface reçoit le nom d'*osculatrice* lorsqu'on a disposé de toutes les constantes qui fixent sa position et déterminent sa nature

de manière à obtenir avec une surface donnée le contact de l'ordre le plus élevé possible. »

Le nombre des conditions à vérifier pour une osculation d'ordre $n^{\text{ième}}$ est $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$; le nombre des coefficients disponibles dans l'équation générale d'une surface de degré m est $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$. Par conséquent, une surface de degré m n'est osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée que dans les cas où l'on peut trouver un nombre entier et positif n propre à vérifier l'équation

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$(1) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m = 3(n+1)(n+2).$$

Quand cette condition n'est pas vérifiée, on peut encore, dans certains cas, déterminer une surface de degré m osculatrice en certains points d'une surface donnée, en disposant d'une ou de deux coordonnées du point de contact, de manière à vérifier une ou deux équations de condition; si l'on ne dispose que d'une seule coordonnée, la surface de degré m peut être osculatrice en tous les points d'une ligne tracée sur la surface donnée; si l'on dispose de deux coordonnées, la surface de degré m ne peut être osculatrice qu'en des points déterminés. L'équation à vérifier est

$$(2) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 3(n+1)(n+2)$$

dans le premier cas, et

$$(3) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m + 12 = 3(n+1)(n+2)$$

dans le second. Nous nous bornerons à discuter l'équation (1).

5. Pour chaque valeur du nombre n qui exprime l'ordre d'osculation, il ne peut y avoir qu'une seule valeur du degré m de la surface osculatrice, et ce degré croît avec l'ordre du contact. On déduit en

effet de l'équation (1)

$$3(m+1)^3 = (m^3 + 6m^2 + 11m) + 2m^3 + 3m^2 - 2m + 3$$
$$> 3(n+1)(n+2),$$
$$m+1 > \sqrt[3]{(n+1)(n+2)}.$$

Toutefois le degré de la surface croît moins rapidement que l'ordre d'osculation. Pour $m = 1$, on trouve $n = 1$. Le plan peut donc avoir une osculation du premier ordre en un point quelconque d'une surface donnée. Pour $m = 2$, l'équation (1) est impossible en nombres entiers, mais on vérifie l'équation (2) en faisant $n = 3$. Ainsi une surface du second degré ne peut pas être osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée, mais elle peut le devenir en des points dont les coordonnées satisfont à une équation de condition. Pour $m = 3$, les équations (1) et (2) sont impossibles, mais on satisfait à l'équation (3) en prenant $n = 5$. On conclut de là qu'une surface du troisième ordre ne peut être osculatrice à une surface donnée qu'en des points dont les coordonnées vérifient deux équations de condition; l'osculation est alors du cinquième ordre. On trouve de même qu'une surface du quatrième degré ne peut être osculatrice qu'en des points dont les coordonnées vérifient deux équations de condition, et que l'osculation est du septième ordre. Enfin, en faisant $m = 5$, on trouve que l'équation (1) est résolue par la valeur $n = 9$. C'est, avec le plan osculateur, la seule solution connue de notre problème. Il aurait fallu poursuivre ces essais jusqu'à la valeur $m = 20$ pour trouver une nouvelle solution : on aurait vu que l'équation (1) est vérifiée lorsqu'on y fait $m = 20$, $n = 58$. On pourrait, par des essais successifs, trouver toutes les solutions en nombres inférieurs à une limite assignée, mais les calculs seraient fastidieux si cette limite était tant soit peu élevée. Nous verrons plus loin qu'on peut parvenir au même résultat par une méthode beaucoup plus expéditive. Mais, avant d'aborder cette question, nous établirons quelques théorèmes généraux sur les diverses formes que le nombre m peut affecter.

I.

4. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$(1) \qquad m[(m+3)^2+2] = 3(n+1)(n+2),$$

on voit que tous les facteurs premiers impairs de $n+1$ et de $n+2$ qui ne sont pas diviseurs de m sont de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$, puisque -2 en est résidu quadratique. Si m est impair, le produit $(n+1)(n+2)$ est impairement pair; si m est pair, le quotient $\frac{(n+1)(n+2)}{m}$ est impair.

Nous distinguerons deux cas, suivant que m est premier avec 3 ou multiple de 3. Dans le premier cas, nous poserons $m = hk$, en désignant par h le plus grand diviseur commun des deux nombres m et $n+1$, par k celui de m et $n+2$. Nous déduirons de l'équation (1)

$$(4) \qquad hk + 3)^2 + 2 = 3\frac{n+1}{h}\,\frac{n+2}{k} = 3pq,$$

en désignant par p et q les deux quotients $\frac{n+1}{h}$, $\frac{n+2}{k}$. Ces deux quotients sont des nombres entiers dont tous les facteurs premiers sont de l'une des deux formes $8x+1$, $8x+3$.

Si le nombre m est multiple de 3, nous posons $m = 3hk$, h désignant le plus grand diviseur commun de $\frac{m}{3}$ et de $n+1$, k celui de $\frac{m}{3}$ et de $n+2$; puis nous déduisons de l'équation (1)

$$(5) \qquad 9(hk+1)^2 + 2 = \frac{n+1}{h}\,\frac{n+2}{k} = pq.$$

Dans les deux cas, les quatre nombres h, k, p et q sont liés entre eux par la relation

$$(6) \qquad kq - hp = 1.$$

Au moyen de ces formules nous démontrerons que les valeurs de m propres à vérifier l'équation (1) ne peuvent être ni des nombres pre-

miers, ou des puissances de nombres premiers autres que 1 et 5, ni des puissances de nombres premiers multipliées par l'un des nombres 2, 4, 8, 16, 6, 12 et 24.

5. Examinons d'abord si le nombre m peut être premier avec l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$. Il peut se présenter deux cas, suivant que m est premier avec 3 ou multiple de 3. Dans le premier cas, on a $m = h$, le nombre h étant diviseur de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$. Les équations (4) et (6) deviennent respectivement

$$(h+3)^2 + 2 = 3pq, \quad hp - q = \pm 1,$$

et l'on a $n+2 = hp$ ou $n+1 = hp$, suivant que la dernière équation est vérifiée avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur.

L'élimination du nombre q entre les deux dernières équations donne

$$(h+3)^2 + 2 = 3(hp^2 \mp p).$$

Nous pouvons nous borner au signe supérieur, en convenant de déterminer le nombre n par la formule $n+2 = hp$ si p est positif et par la formule $n+1 = -hp$ si p est négatif. Sous cette réserve, il nous suffit de résoudre l'équation

$$(7) \qquad h^2 - 3(p^2 - 2)h + 11 + 3p = 0,$$

en nombres entiers h, p, le premier, h, positif, le second, p, positif ou négatif.

On ne peut pas supposer $11 + 3p < 0$, car, les deux racines de l'équation (7) étant de signes contraires, h serait la racine positive, et, la racine négative étant désignée par $-l$, on aurait

$$3(p^2 - 2) = h - l, \quad -11 - 3p = hl,$$
$$(hl + 11)^2 = 9p^2 = 3(h - l) + 18,$$
$$h^2 l^2 + 22hl < 3(h - l) < 3h.$$

Or cette inégalité est évidemment impossible en nombres entiers et

positifs. Si donc l'équation (7) est possible, les valeurs de p vérifient la condition

$$11 + 3p > 0.$$

Les valeurs de p comprises entre $-\frac{11}{3}$ et $\frac{11}{3}$ sont ± 2, ± 3, car, si l'on suppose $p = \pm 1$, les racines de l'équation (7) sont imaginaires. Soit $p = -2$. L'équation (7) devient $h^2 - 6h + 5 = 0$, et l'on en déduit

$$h = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 5, 1.$$

Si l'on prend $p = 2$, les valeurs de h sont irrationnelles. Il en est de même pour $p = -3$; mais, en faisant $p = 3$, on obtient l'équation

$$h^2 - 21h + 20 = 0,$$

dont les racines sont 20 et 1.

Nous trouvons ainsi trois solutions de notre problème : $m = 1$, 5 et 20. Comme, pour les deux premières, la valeur de p est négative, -2, nous devons déterminer la valeur correspondante de n par la formule $n + 1 = -hp = 2h$, ce qui donne $n = 1$ pour $h = 1$ et $n = 9$ pour $h = 5$. Ces deux solutions ($m = 1$, $n = 1$; $m = 5$, $n = 9$) sont connues. La troisième ($m = 20$) me semble nouvelle. Comme elle correspond à une valeur positive de p, on doit déterminer la valeur correspondante de n au moyen de la formule $n + 2 = hp$; on trouve ainsi $n = 20 \times 3 - 2 = 58$.

Il nous reste à examiner si l'équation (7) est possible en supposant $p > 3$. Les deux racines étant alors positives, désignons-les par h et par l; elles vérifieront les deux relations

$$h + l = 3(p^2 - 2), \quad hl = 11 + 3p.$$

Comme la racine entière h divise le dernier terme $11 + 3p$, l'autre racine l est aussi un nombre entier. Or les deux nombres h et l étant entiers et positifs, on a évidemment $2hl > h + l$; donc

$$6p + 22 > 3p^2 - 6, \quad 3p^2 - 6p - 28 < 0.$$

Cette inégalité exige que p soit inférieur à la plus grande racine du trinôme $p^2 - 2p - \frac{28}{3}$; ce nombre doit donc être inférieur à 5, et, puisqu'il est supposé supérieur à 3, il doit être égal à 4. Comme, en faisant $p = 4$, on trouve pour les racines h et l des valeurs irrationnelles, nous pouvons conclure que l'équation (7) n'a pas d'autre solution que les trois ci-dessus indiquées.

Nous pouvons résumer cette discussion dans le théorème suivant :

I. *Parmi les solutions de l'équation* (1), *les seules valeurs de m qui soient en même temps premières avec l'un des facteurs $n+1$, $n+2$ et non multiples de* 3 *sont $m = 1$, $m = 5$ et $m = 20$, auxquelles correspondent respectivement $n = 1$, $n = 9$ et $n = 58$.*

Or, si m est une puissance d'un nombre premier autre que 3, il est nécessairement premier et avec 3 et avec l'un des deux facteurs $n+1$, $n+2$. Nous pouvons donc conclure, relativement à la question géométrique proposée :

II. *Parmi les surfaces dont le degré est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier, pair ou impair, mais autre que* 3, *les seules que l'on puisse rendre osculatrices en un point arbitraire d'une surface donnée sont le plan et la surface du cinquième degré.*

6. Supposons $m = 3hk$ et cherchons dans quels cas l'un des facteurs h ou k se réduit à l'unité. Cela aura nécessairement lieu si $m = 3A^\alpha$, A désignant un nombre premier quelconque, car, l'équation (1) devenant dans ce cas

$$A^\alpha[9(A^\alpha+1)^2+2] = (n+1)(n+2),$$

un seul des deux facteurs $n+1$, $n+2$ sera divisible par A et l'autre sera premier avec m. Ainsi, en résolvant la question proposée, nous sommes assurés de trouver toutes les solutions de l'équation (1) qui peuvent être renfermées dans la formule $m = 3A^\alpha$, où A désigne un nombre premier quelconque, égal à 3 ou différent de 3.

Suivant que $\frac{m}{3}$ divise le facteur $n+2$ ou le facteur $n+1$, on a

$$m = 3h, \quad \frac{n+2}{h} = p \quad \text{ou} \quad \frac{n+1}{h} = p,$$

de sorte que, l'autre facteur étant désigné par q, les trois nombres p, q, h doivent vérifier les deux équations

$$hp - q = \pm 1, \quad (3h + 3)^2 + 2 = pq = p(hp \mp 1).$$

Comme dans le cas précédent, on peut ne conserver que le signe supérieur, en convenant d'accepter les valeurs négatives de p et de déterminer n par la formule $n + 2 = ph$ si p est positif, et par la formule $n + 1 = -ph$ si p est négatif. Sous cette restriction, nous n'avons plus qu'à chercher les solutions en nombres entiers de l'équation

$$(8) \qquad 9h^2 - (p^2 - 18)h + 11 + p = 0.$$

On ne peut pas supposer $p + 11 < 0$, car, en posant dans cette hypothèse $p = -p_1$, p_1 serait un nombre entier et positif. Comme le nombre h est positif et diviseur de $p + 11 = -(p_1 - 11)$, on ferait $p_1 - 11 = hl$, l désignant un quotient entier et positif, et l'on déduirait de la formule (8)

$$9h - l = p_1^2 - 18, \quad 9hl = 9p_1 - 99 = l(p_1^2 - 18 + l).$$

Comme l est entier et positif, on déduirait de la dernière formule

$$p_1^2 - 18 < 9p_1 - 99, \quad (p_1 - \tfrac{9}{2})^2 + 81(1 - \tfrac{1}{4}) < 0,$$

ce qui est évidemment impossible.

La somme $p + 11$ est donc positive. Soit donc $p + 11 = hl$; le nombre l est entier et positif; de plus, l'équation (8) divisée par h donne

$$9h + l = p^2 - 18.$$

Si l'on suppose $l = 1$, on déduit des deux formules précédentes, $9h = p^2 - 19 = 9p + 99$,

$$p^2 - 9p - 118 = 0.$$

Or on reconnaît aisément que cette équation n'a pas de racine entière. Comme le nombre l est résidu quadratique de 3 et qu'il est supérieur à 1, il ne peut pas être inférieur à 4. Le produit $3lh$ est donc supérieur à $9h+l$, car, si l'on suppose $l < 3h$, $9h+l$ est $< 12h$; si, au contraire, on suppose $l > 3h$, $9h+l$ est $< 4l < 3hl$, si h est > 1, et l'on reconnaît aisément que l'on ne peut pas supposer $h = 1$. On a donc

$$3lh = 3p + 33 > p^2 - 18, \quad p^2 - 3p - 51 < 0.$$

Comme les racines du trinôme $p^2 - 3p - 51$ sont comprises entre 14 et -11, la valeur de p doit être comprise entre les mêmes limites. D'ailleurs la valeur numérique de p doit être supérieure à 4, car autrement l'équation (8) n'aurait que des racines négatives. Le nombre p est donc compris entre 14 et 4 ou entre -4 et -11. D'un autre côté, le nombre p étant diviseur de $9(h+1)^2+2$ ne peut être que simplement pair ou impair, et ses diviseurs premiers ne peuvent être d'aucune des deux formes $8l+5$, $8l+7$. Les valeurs comprises entre les limites assignées et vérifiant ces conditions sont 6, 9, 11, -6, -9. Or l'équation (8) exige que p soit premier avec 3. Il ne reste donc que la valeur $p = 11$, pour laquelle l'équation (8) devient

$$9h^2 - 103h + 22 = 0.$$

Comme les racines de cette équation sont irrationnelles, nous concluons :

I. *Parmi les solutions de l'équation* (1), *il n'en est aucune où le nombre m soit en même temps divisible par* 3 *et premier avec l'un des deux nombres* $n+1$, $n+2$.

Cela aurait lieu nécessairement si l'on pouvait vérifier l'équation (1) en prenant $m = 3A^\alpha$; donc :

II. *L'équation* (1) *ne peut être vérifiée par aucune valeur de m comprise dans la formule $m = 3A^\alpha$, où A désigne un nombre premier quelconque, et α un exposant entier et positif.*

Relativement à la question géométrique proposée, nous avons ce théorème :

III. *Aucune surface de degré triple d'un nombre premier ou d'une puissance de nombre premier ne peut être osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée.*

7. Le facteur commun du nombre m et de l'un des deux nombres $n+1$ ou $n+2$ peut-il être une puissance de 2? La solution de cette question renferme implicitement celle de la question suivante : le nombre m qui satisfait à l'équation (1) peut-il être de la forme $2^\lambda A^\alpha$, A désignant un nombre premier impair? Car, si $m = 2^\lambda A^\alpha$ et que m ne soit pas premier avec l'un des deux facteurs $n+1$, $n+2$, le nombre 2^λ sera le plus grand diviseur de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$.

Nous distinguerons deux cas, suivant que m sera premier avec 3 ou multiple de 3. Dans le premier cas, on aura les équations

$$(2^\lambda h + 3)^2 + 2 = 3pq, \quad n+1 = 2^\lambda p, \quad n+2 = hq,$$

ou bien

$$n+1 = hq, \quad n+2 = 2^\lambda p.$$

L'élimination du nombre n donne l'une des deux équations

$$hq - 2^\lambda p = \pm 1.$$

Multipliant cette équation par $3q$ et remplaçant $3pq$ par l'expression donnée dans la première formule, on a l'équation

$$(9) \qquad 2^{3\lambda} h^2 - 3(q^2 - 2^{2\lambda+1})h + 11 \cdot 2^\lambda \pm 3q = 0.$$

Soit d'abord $\lambda = 1$. L'équation à résoudre devient

$$(A) \qquad 8h^2 - 3(q^2 - 8)h + 22 \pm 3q = 0.$$

1° Si $22 \pm 3q$ est > 0, comme le nombre h doit être diviseur du

dernier terme, nous poserons

$$(a) \qquad 22 \pm 3q = hl,$$

de sorte que l'équation (A), divisée par h, donnera

$$(b) \qquad 8h + l = 3q^2 - 24.$$

Le nombre l est entier et positif; on déduit de l'équation (a) qu'il est premier avec 3 et de l'équation (b) qu'il est de la forme $8\xi + 3$. D'ailleurs, le nombre h est un nombre impair supérieur à 3. Le produit hl est donc supérieur à la somme $8h + l$, de sorte que l'on a

$$22 \pm 3q > 3q^2 - 24, \quad 3q^2 \mp 3q - 46 < 0.$$

La valeur de $\pm q$ doit donc être comprise entre les deux racines du trinôme $x^2 - x - \frac{46}{3}$, et par conséquent entre les deux nombres 3 et -2. Mais l'équation (b) exige que q^2 soit > 8. L'équation (A) est donc impossible dans l'hypothèse admise.

2° Soit $22 \pm 3q < 0$, ce qui exige qu'on prenne le signe inférieur et que l'on ait $3q > 22$. Posons $3q - 22 = hl$; l'équation (A), divisée par h, donne

$$8h - l = 3q^2 - 24.$$

Les deux nombres h et l sont entiers et positifs, et l'on déduit de la dernière équation que le nombre l est de la forme $8\xi + 5$. Enfin de l'hypothèse $q > \frac{22}{3}$ on conclut

$$q^2 > 49, \quad 8h - l > 0 \quad \text{et} \quad 8h - l < 8h - 2lh.$$

On a donc

$$3q^2 - 24 < 6q - 44, \quad 3(q - 1)^2 + 17 < 0,$$

ce qui est évidemment impossible. Ainsi, quel que soit le signe adopté

dans l'équation (A), il est impossible de la vérifier par des valeurs entières et positives de h et de p. Donc :

I. *L'équation* (1) *n'admet aucune solution où le plus grand diviseur commun de m et de l'un des nombres $n+1$, $n+2$ soit égal à* 2.

Or cela aurait nécessairement lieu si le nombre m pouvait être de la forme $2A^\alpha$, A désignant un nombre premier supérieur à 3, car, le nombre m ne pouvant être premier avec aucun des deux facteurs $n+1$, $n+2$ (n° 3, I), l'un de ces deux nombres aurait avec m le nombre 2 comme plus grand commun diviseur. Donc :

II. *Le degré d'une surface osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée ne peut être égal au double d'un nombre premier supérieur à 3 ni au double d'une puissance d'un pareil nombre.*

8. Reprenons l'équation (9) et montrons que, si λ n'est pas supérieur à 4, on ne peut pas supposer $11.2^\lambda \pm 3q < 0$. Dans cette hypothèse, il faut prendre le signe inférieur et faire $3q > 11.2^\lambda$. Posons

$$(a) \qquad 3q - 11.2^\lambda = hl;$$

l'équation (9), divisée par h, donnera

$$(b) \qquad 3q^2 - 6.2^{2\lambda} = 2^{3\lambda}h - l,$$

l désignant aussi bien que h un nombre entier et positif. On déduit de la dernière formule que l doit être de la forme $8x+5$ et de l'équation (a) que ce nombre est premier avec 3.

En multipliant l'équation (a) par $3q + 11.2^\lambda$ et l'équation (b) par 3, on obtient les deux formules

$$9q^2 - 121.2^{2\lambda} = hl(3q + 11.2^\lambda),$$
$$9q^2 - 18.2^{2\lambda} = 3.2^{3\lambda}h - 3l,$$

dont la comparaison donne l'inégalité

$$l(3q + 11.2^\lambda) < 3.2^{3\lambda}.$$

d'où, ayant égard à l'hypothèse $3q > 11 . 2^\lambda$, on déduit

$$l < \frac{3 . 2^{2\lambda-1}}{11},$$

1° $\lambda = 2$:

$$l < \frac{3 . 8}{11} < 3;$$

2° $\lambda = 3$:

$$l < \frac{3 . 32}{11} < 9;$$

3° $\lambda = 4$:

$$l < \frac{3 . 128}{11} < 36$$

Comme le nombre l doit être de la forme $8x + 5$ et non divisible par 3, la limite obtenue exclut toute valeur de l dans le premier cas; elle ne laisse que la valeur $l = 5$ quand $\lambda = 3$ et les valeurs 5, 13, 29 quand $\lambda = 4$.

Or, en éliminant h entre les équations (a) et (b), on obtient

$$(d) \qquad 3lq^2 - 3 . 2^{3\lambda} q + l^2 - 6 . 2^{2\lambda} l + 11 . 2^{4\lambda} = 0,$$

et l'on constate aisément que cette équation n'est pas vérifiée par une valeur entière de q, soit lorsqu'on fait $\lambda = 3$, $l = 5$, soit lorsqu'on prend $\lambda = 4$ et qu'on donne à l l'une des trois valeurs 5, 13 ou 19. Donc, si l'équation (9) est possible pour des valeurs de λ inférieures à 5, on a nécessairement

$$11 . 2^\lambda \pm 3q > 0.$$

9. La vérification que nous venons d'indiquer relativement à l'équation (d) n'offre pas de difficulté; mais, dans les deux cas où, λ étant égal à 4, le nombre l est égal à 13 ou à 29, le calcul direct est un peu long. On peut l'éviter de la manière suivante.

D'abord, en considérant l'équation (d) suivant le module 2^9, on a entre l et q la congruence

$$3q^2 + l \equiv 0 \pmod{512},$$

dont les solutions sont données par la formule $q = 2^8\theta \pm 217$ si $l = 13$ et par la formule $q = 2^8\theta \pm 209$ si $l = 29$. Mais, comme le nombre q ne peut être de la forme $8x + 7$, on doit exclure les signes inférieurs.

On déduit aussi de l'équation (d)

$$3q \equiv 11 . 2^4 \pmod{l}$$

Si $l = 13$, on en déduit

$$q = 2^8\theta + 217 \equiv 11 \pmod{13},$$
$$\theta = 13\xi + 6.$$

Si $l = 29$, on a

$$3q = 2^8 3\theta + 627 \equiv 11 . 16 \pmod{29},$$
$$\theta = 29\xi + 3.$$

Enfin, comme la somme des trois derniers termes de l'équation (d) est positive, il faut que la somme des deux autres soit négative, ce qui exige que l'on ait

$$lq < 2^{12}, \quad l(2^8\theta + a) < 2^{12} \quad (a = 217, 209).$$

On a donc *a fortiori*

$$\theta < \frac{16}{l},$$

et, par conséquent, $\theta < 2$ si $l = 13$, $\theta < 1$ si $l = 29$. Or cela est impossible, puisque θ ne peut être inférieur à 3. Ainsi, dans les deux cas énoncés, l'équation (d) n'admet pas de solution entière, ce qui justifie la conclusion du numéro précédent.

10. Examinons si l'équation (9) peut être résolue en supposant $11 . 2^\lambda \pm q > 0$. Nous ferons

$$(a) \qquad 11 . 2^\lambda \pm 3q = hl,$$

et nous déduirons de l'équation (9), divisée par h,

$$(b) \qquad 2^{3\lambda}h + l = 3(q^2 - 2^{2\lambda+1}).$$

On conclut de la dernière formule que l est de la forme $8x + 3$.

On ne peut pas prendre le signe inférieur dans l'équation (a), car avec ce signe on devrait vérifier l'inégalité $q < \frac{11 \cdot 2^\lambda}{3}$. Mais on déduit de l'équation (b)

$$q > 2^\lambda \sqrt{\frac{2^\lambda h + b}{3}},$$

de sorte que le nombre q serait compris entre les deux limites

$$(c) \qquad 2^\lambda \sqrt{\frac{2^\lambda h + 6}{3}} < q < 2^\lambda \frac{11}{3},$$

ce qui exige, avant tout, que l'on ait

$$2^\lambda h + 6 < \frac{121}{3}, \quad 2^\lambda h < \frac{103}{3}.$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 5, il faut que λ soit inférieur à 3. Soit $\lambda = 1$. Puisque l'on a $h \geq 5$, $2h + 6 \geq 16$, et l'on déduit de la formule (c)

$$4 < q < \frac{22}{3} < 8.$$

Le nombre q devrait donc être égal à l'un des deux nombres 5 ou 7, ce qui est impossible, puisque -2 est résidu quadratique de q.

Soit $\lambda = 2$. On aura

$$2^\lambda h + 6 \geq 26,$$

et la formule (c) donnera

$$11 < 4\sqrt{\frac{26}{3}} < q < 4\frac{11}{3} < 15.$$

Le seul nombre impair compris entre ces deux limites est 13; or,

-2 n'étant pas résidu quadratique de 13, la valeur $q = 13$ est inacceptable.

Ainsi, quelle que soit la valeur de λ, on doit prendre le signe supérieur dans les équations (9) et (a).

L'élimination de q entre les deux équations (a) et (b) donne

$$h^2 l^2 - 22 . 2^\lambda hl + 103 . 2^{2\lambda} - 2^{3\lambda} 3h - 3l = 0.$$

Nous déduisons immédiatement de cette équation qu'on ne peut pas supposer $l < 2^{2\lambda+1}$, car, dans cette hypothèse, il faut que les deux racines de l'équation en l soient de même signe, sans quoi on aurait

$$2^{2\lambda+1} > l > 22 . 2^\lambda h + 3, \quad h < \frac{2^\lambda}{11},$$

ce qui est impossible, λ étant inférieur à 5 et h supérieur à 5. Or, si les deux racines de l'équation en l sont positives, on a

$$h < \frac{103}{3 . 2^\lambda}.$$

Si $\lambda > 2$, on a

$$h < \frac{103}{24} < 5,$$

ce qui est impossible. Si $\lambda = 2$, h est < 9; enfin si $\lambda = 1$, h est < 18. Comme le nombre h est au moins égal à 5 et premier avec 3, il n'a que l'une des valeurs 5, 7 si $\lambda = 2$ et l'une des valeurs 5, 7, 11, 13 et 17 si $\lambda = 1$. Or, on reconnaît aisément que ces valeurs sont inadmissibles. En effet, prenons l'équation (9) sous la forme

$$(e) \qquad 3(hq^2 - q) = 2^\lambda [(2^\lambda h + 3)^2 + 2];$$

en y faisant $\lambda = 2$ et $h = 5$ ou 7, on obtient les deux équations

$$5q^2 - q = 4 . 3 . 59, \quad 7q^2 - q = 4 . 3 . 107,$$

qui ne peuvent être vérifiées en nombres entiers. De même, si l'on fait $\lambda = 1$ dans l'équation (e) et qu'on y substitue les valeurs 5, 7, 11, 13

et 17 de h, on trouve

$$5q^2 - q = 2.3.19, \quad 7q^2 - q = 2.97.$$
$$11q^2 - q = 2.209, \quad 13q^2 - q = 2.281.$$
$$17q^2 - q = 2.457.$$

Or, on constate sans peine l'impossibilité de ces équations en nombres entiers; comme 97, 281, 457 sont des nombres premiers et que q doit être impair, ce nombre ne pourrait recevoir que l'une des deux valeurs 1 ou 97 dans la seconde équation, l'une des valeurs 1 ou 281 dans la quatrième et l'une des valeurs 1 ou 457 dans la dernière, ce qui est manifestement impossible. Dans la troisième équation, q devrait être multiple de 11; on aurait donc

$$121q_1^2 - q_1 = 2.19,$$

ce qui est impossible. Enfin, dans la première équation, on ne peut donner à q que l'une des deux valeurs 3 ou 19, et l'on reconnaît immédiatement que ces valeurs ne vérifient pas l'équation.

Si donc l'équation (9) est possible, on doit supposer $l > 2^{2\lambda+1}$. Or, dans ce cas, $2^\lambda(11.2^\lambda + 3q) = 2^\lambda lh > 2.2^{3\lambda}h$; si donc $l < 2^{3\lambda}h$, on a

$$2^\lambda lh > 2^{3\lambda}h + l,$$

et, si $l > 2^{3\lambda}h$, on a *a fortiori*

$$2^\lambda lh > 2l > 2^{3\lambda}h + l.$$

La comparaison des deux formules (a) et (b) donne donc

$$11.2^{2\lambda} + 3.2^\lambda q < 3q^2 - 6.2^{2\lambda}, \quad 3q^2 - 3.2^\lambda q - 2^{2\lambda}.17 < 0$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$3(q^2 - 2^{\lambda-1})^2 - 2^{2\lambda-2}(3 + 4.17) < 0,$$

et l'on en déduit

$$q < 2^{\lambda-1}\left(1+\sqrt{1+\frac{68}{3}}\right) < 3.2^{\lambda}.$$

D'ailleurs on déduit de la formule (b), en ayant égard à l'inégalité $l > 2^{2\lambda+1}$,

$$3q^2 > 2^{2\lambda}(7+2^{\lambda}h), \quad q > 2^{\lambda}\sqrt{\frac{7+2^{\lambda}h}{3}}.$$

Le nombre q est donc compris entre les deux limites

$$2^{\lambda}\sqrt{\frac{7+2^{\lambda}h}{3}} < q < 3.2^{\lambda},$$

ce qui exige, avant tout, que l'on ait

$$7+2^{\lambda}h < 27, \quad h < \frac{20}{2^{\lambda}}.$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 5, il faut que λ soit égal à 1. Dans ce cas, le nombre q doit être compris entre 4 et 6, c'est-à-dire qu'il doit être égal à 5. Mais cette valeur est inadmissible, parce que -2 est résidu quadratique de q. Ainsi, dans toute hypothèse, l'équation (9) est impossible lorsque l'exposant λ est inférieur à 5.

11. Le résultat obtenu dans les quatre numéros précédents peut s'énoncer de la manière suivante :

I. *Parmi les valeurs de m propres à vérifier l'équation* (1), *il n'en est aucune qui soit première avec* 3 *et dont le plus grand diviseur commun avec l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$ soit égal à* 2, 4, 8 *ou* 16.

En réunissant cette conclusion avec le théorème I du n° **5**, on reconnaît que les formules $2A^{\alpha}$, $8A^{\alpha}$, $16A^{\alpha}$ ne renferment aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1) et que la formule $4A^{\alpha}$ n'en renferme qu'une seule, $m = 20$. En effet, le nombre m étant diviseur du produit $(n+1)(n+2)$, dont les facteurs sont premiers entre eux,

il faut ou bien qu'il divise l'un des facteurs et qu'il soit premier avec l'autre, ou bien qu'il se décompose en deux facteurs premiers entre eux. Dans le premier cas, il résulte des n^os **5** et **6** que le nombre m ne peut avoir que l'une des trois valeurs 1, 5 et 20; dans le second, il est impossible qu'il soit de la forme $2^\lambda A^\alpha$, λ désignant un nombre inférieur à 5 et A un nombre premier supérieur à 3, car alors il ne pourrait se décomposer que d'une seule manière en deux facteurs premiers entre eux, et 2^λ serait le plus grand diviseur de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$, ce qui a été démontré impossible. Donc :

II. *Si l'on désigne par* A *un nombre premier supérieur à* 3, *par* α *un exposant entier et positif, les trois formules* $2A^\alpha$, $8A^\alpha$, $16A^\alpha$ *ne renferment aucune valeur de* m *propre à vérifier l'équation* (1).

III. *La seule valeur de* m, *propre à vérifier l'équation* (1), *qui soit renfermée dans la formule* $4A^\alpha$, *est* $m = 20$.

Relativement au problème géométrique proposé, nous concluons que :

IV. *Parmi les surfaces que l'on peut rendre osculatrices en un point arbitraire d'une surface donnée, celle du vingtième ordre est la seule dont le degré soit égal au produit d'une puissance d'un nombre premier supérieur à* 3, *multipliée par l'un des nombres* 2, 4, 8 *ou* 16.

12. Si le nombre m est de la forme $3.2^\lambda h$, h désignant un nombre impair, et si le plus grand diviseur commun de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$ est égal à 2^λ, l'équation (5) devient

$$9(2^\lambda h+1)^2+2=\frac{(n+1)(n+2)}{2^\lambda h}=pq.$$

et donne lieu à l'une des deux décompositions suivantes :

$$n+1=2^\lambda q,\quad n+2=hp,\quad hp-2^\lambda q=+1,$$
$$n+1=hp,\quad n+2=2^\lambda q,\quad hp-2^\lambda q=-1.$$

Le problème de trouver les valeurs de m divisibles par 3 qui véri-

fient l'équation (1), de manière que le plus grand diviseur commun de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$ soit 2^λ, revient donc à résoudre en nombres entiers et positifs le système des deux équations

$$hp - 2^\lambda q = \pm 1, \quad pq = 9(2^\lambda h + 1)^2 + 2;$$

c'est ce que nous allons faire, en nous bornant aux valeurs 1, 2 et 3 de λ.

En multipliant la première équation par p et remplaçant pq par sa valeur en fonction de h, nous trouvons

$$(10) \qquad 9 . 2^{3\lambda} h^2 - (p^2 - 18 . 2^{2\lambda}) h + (11 . 2^\lambda \pm p) = 0.$$

Nous devons distinguer deux cas, suivant que le dernier terme de cette équation est positif ou négatif.

1° Soit d'abord $11 . 2^\lambda \pm p < 0$, ce qui exige que l'on prenne le signe inférieur et qu'on suppose $p > 11 . 2^\lambda$. Comme le nombre h doit être diviseur du dernier terme, nous aurons, en désignant par l un nombre entier et positif,

$$(a) \qquad p - 11 . 2^\lambda = hl,$$

$$(b) \qquad 9 . 2^{3\lambda} h - l = p^2 - 18 . 2^{2\lambda}.$$

Nous concluons de l'équation (b) que le nombre l doit vérifier les deux congruences

$$l \equiv -p^2 \pmod{8}, \quad l \equiv -p^2 \pmod{9},$$

et que, par conséquent, il est de la forme $24x + 23$. Si, après avoir multiplié l'équation (a) par $p + 11 . 2^\lambda$, on la combine avec l'équation (b), on trouve

$$-103 . 2^{2\lambda} = h[l(p + 11 . 2^\lambda) - 9 . 2^{3\lambda}] + l,$$

et l'on en conclut, en ayant égard à l'hypothèse $p > 11 . 2^\lambda$,

$$l < \frac{9 . 2^{\lambda-1}}{11}.$$

Si $\lambda = 1$ ou 2, le nombre l doit être inférieur à 23, ce qui est impossible. Si $\lambda = 3$, l est < 32; or, la seule valeur inférieure à cette limite qui soit renfermée dans la formule $24x + 23$ est $l = 23$. Faisant donc $\lambda = 3$ et $l = 23$ dans les équations (a) et (b), et éliminant p, on obtient l'équation

$$529h^2 - 16.35h + 103.2^6 + 23 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$h < \frac{16.35}{529} < 2$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 3, nous concluons que l'hypothèse est impossible.

15. Soit donc $11.2^\lambda \pm p = hl > 0$. Nous déduisons de l'équation (10)

$$(a) \qquad 11.2^\lambda \pm p = hl,$$

$$(b) \qquad 9.2^{3\lambda}h + l = p^2 - 18.2^{2\lambda}.$$

La dernière formule exige que l soit résidu quadratique de 8 et de 3 et que, conséquemment, il soit de la forme $24x + 1$.

On ne peut pas supposer $h = 1$, parce que le nombre m serait alors premier avec l'un des deux nombres $n + 1$, $n + 2$, contrairement au théorème 1 du n° 6. On ne peut pas non plus prendre $h = 3$, car, en éliminant p entre les équations (a) et (b), on aurait l'équation

$$9l^2 - (66.2^\lambda + 1)l + 2^{2\lambda}(103 - 27.2^\lambda) = 0,$$

dont l'impossibilité se constate aisément de la manière suivante. Le nombre l compris dans la formule $24x + 1$ doit diviser $103 - 27.2^\lambda$. Or, en faisant $\lambda = 1$, 2 et 3, on trouve que ce dernier nombre est égal à 49, -5, -113; comme aucun de ces nombres n'admet de diviseur de la forme voulue $24x + 1$ autre que 1, on devrait prendre $l = 1$, et l'on reconnaît aisément que cette valeur ne satisfait pas à l'équation

Ainsi, le nombre h ne peut pas être inférieur à 5.

On ne peut pas supposer $l > 9.2^{2\lambda}$, car, en multipliant l'équation (a)

par $2^{\lambda+1}$, on aurait

$$22.2^{2\lambda} \pm 2^{\lambda+1}p - 2^{2\lambda}lh > 9.2^{2\lambda}h + l,$$
$$22.2^{2\lambda} \pm 2^{\lambda+1}p > p^2 - 18.2^{2\lambda},$$
$$(p \mp 2^{\lambda})^2 < 2^{2\lambda}.41.$$

On a donc

$$\pm p < 2^{\lambda}(1 + \sqrt{41}) < 8.2^{\lambda}.$$

D'ailleurs on déduit de l'équation (b), en ayant égard à l'hypothèse $l > 9.2^{2\lambda}$, que la valeur numérique de p doit être inférieure à $3.2^{\lambda}\sqrt{3 + 2^{\lambda}h}$. On devrait donc avoir

$$3.2^{\lambda}\sqrt{3 + 2^{\lambda}h} < 8.2^{\lambda},$$
$$9(3 + 2^{\lambda}h) < 64,$$

ce qui est impossible, même en supposant $\lambda = 1$, puisque le nombre h n'est pas inférieur à 5.

Si donc l'équation (10) est possible, on a

$$l < 9.2^{2\lambda}.$$

On ne peut pas supposer $l = 1$, car, en éliminant p entre les équations (a) et (b), on obtient la formule

$$(c) \qquad h^2l^2 - 2^{\lambda+1}(11l + 9.2^{2\lambda-1})h + 103.2^{2\lambda} - l = 0,$$

d'où, en supposant $l = 1$, et en faisant successivement $\lambda = 1$, 2 et 3, on déduit

$$h^2 - 4.29h + 3.137 = 0,$$
$$h^2 - 8.83h + 27.61 = 0,$$
$$h^2 - 16.229h + 3.13.169 = 0.$$

L'impossibilité de ces équations se reconnaît aisément, sans effectuer le calcul des racines. D'abord, l'une des racines ne peut pas être entière sans que l'autre le soit également. Le dernier terme de chacune

de ces équations doit donc se décomposer en deux facteurs dont la somme soit égale au coefficient du second terme changé de signe. Comme ce dernier coefficient n'est divisible par 3 dans aucune de ces équations, tandis que le dernier terme est multiple de 3, il faut que l'une des racines soit multiple de 3 et que l'autre soit première avec 3. Les deux racines seraient donc $h = 3$, $h' = 137$ pour la première équation, 27 et 61 pour la deuxième, 3 et 13^3 pour la troisième; comme aucun de ces trois couples de racine ne présente la somme voulue, l'hypothèse est inadmissible; le nombre l doit être compris entre les deux limites 1 et $9 . 2^{2\lambda}$.

La somme des deux derniers termes étant positive dans l'équation (c), il faut que la somme des autres termes soit négative; on a donc

$$l^2 - \frac{22 . 2^\lambda}{h} l - \frac{9 . 2^{3\lambda}}{h} < 0,$$

et, par conséquent, le nombre l doit être inférieur à la plus grande racine de ce trinôme, c'est-à-dire qu'il doit vérifier la formule

$$(d) \qquad l < \frac{11 . 2^\lambda}{h} + 2^\lambda \sqrt{\frac{121}{h^2} + \frac{9 . 2^\lambda}{h}}.$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 5, il faut que l'on ait

$$l < \frac{11 . 2^\lambda}{5} + 2^\lambda \sqrt{5 + 2^{\lambda+1}}.$$

Si $\lambda = 1$, l est $< 5 + 2 . 3$; si $\lambda = 2$, on trouve

$$l < 9 + 4\sqrt{13} < 25;$$

enfin, si $\lambda = 3$, le nombre l doit être inférieur à $\frac{88}{5} + 8\sqrt{5 + 16} < 58$. Les deux premières valeurs de λ ne laissent pour l aucune valeur admissible, puisque ce nombre doit être de la forme $24x + 1$, sans se réduire à 1. Quand $\lambda = 3$, le nombre l ne peut avoir que l'une des deux valeurs 25 et 49, auxquelles correspondent, par la formule (c),

les deux équations

$$(25h)^2 - 16.563h + 6567 = 0,$$
$$(49h)^2 - 16.827h + 6543 = 0.$$

La première n'admet pas de racine rationnelle, parce que l'on en déduit en même temps

$$h < \frac{16.563}{625} < 16, \quad 3h \equiv 7 \pmod{5}, \quad h = 10x + 9;$$

or le dernier terme $6567 = 3.11.199$ n'admet pas de diviseur qui vérifie en même temps ces deux conditions. La deuxième équation est également impossible, parce qu'on en déduit la congruence impossible

$$h^2 - 2h + 3 = (h-1)^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

En joignant ce résultat à celui du numéro précédent, nous sommes en droit de conclure que l'équation (10) est impossible en nombres entiers. Donc :

I. *Parmi les valeurs de m qui satisfont à l'équation* (1), *il n'en est aucune qui soit multiple de* 3 *et dont le plus grand diviseur commun avec l'un des nombres $n+1$, $n+2$ soit égal à* 2, 4 *ou* 8.

C'est cependant ce qui aurait lieu si l'équation (1) admettait quelque solution de la forme $3.2^\lambda A^\alpha$, A désignant un nombre premier impair, α un exposant entier et positif, λ l'un des trois nombres 1, 2 ou 3, car le produit $(n+1)(n+2)$ étant divisible par $\frac{m}{3} = 2^\lambda A^\alpha$ sans qu'aucun des deux facteurs soit premier avec m (n° **6**), il est nécessaire que l'un de ces facteurs soit divisible par 2^λ et l'autre par A^α. Nous avons donc, relativement à la question géométrique proposée, le théorème suivant :

II. *Aucune des surfaces dont le degré est compris dans l'une des formules* $6A^\alpha$, $12A^\alpha$, $24A^\alpha$, *où* A *désigne un nombre premier impair et α un exposant entier et positif, ne peut être rendue osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée.*

II

14. En procédant d'une manière analogue, on trouvera des théorèmes semblables à ceux que nous venons d'établir, mais dans lesquels le facteur 2 sera remplacé par quelque facteur premier impair. Nous nous bornerons, sur ce sujet, aux résultats obtenus, afin de construire certaines formes linéaires où se trouvent renfermées toutes les solutions de l'équation (1), ce qui nous permettra de trouver aisément toutes les solutions en nombres inférieurs à une limite assignée.

L'équation (1), multipliée par 4, peut s'écrire

$$(1)\qquad 4m^3 + 24m^2 + 44m + 3 = 3(2n+3)^2 - 3y^2.$$

Suivant le module 5, y^2 ne peut avoir que l'une des valeurs $0, 1, -1$; le nombre m doit donc vérifier l'une des trois congruences

$$f(m) = m^3 + m^2 + m \equiv 3 - 3y^2 \equiv 3, 0, 1.$$

Or

$$f(\pm 1) = 1 \pm 2 \equiv 3, 4, \quad f(\pm 2) \equiv 4.$$

On doit donc exclure toutes les valeurs de m renfermées dans les formes linéaires

$$5x + (2, 3, 4).$$

Soit $m = 5\theta + 1$. L'équation (1), considérée suivant le module 25, donne la congruence

$$4(125\theta + 1) - (10\theta + 1) - 6(5\theta + 1) + 3 \equiv 3y^2 \pmod{25},$$
$$20\theta \equiv 3y^2 \pmod{25}.$$

Cette congruence exige que y et conséquemment θ soient multiples de 5. Toutes les valeurs admissibles de m dans la formule $5\theta + 1$ sont donc de la forme $25l + 1$. Les valeurs comprises dans la formule 5θ se distribuent dans les cinq formes linéaires $25l + (0, 5, 10, 15, 20)$. Les valeurs de m qui satisfont à l'équation (1) sont donc toutes ren-

fermées dans les six formules

$$(2) \qquad 25l + (0, 1, 5, 10, 15, 20).$$

15. En réduisant l'équation (1) suivant le module 27, on trouve que le nombre m doit vérifier la congruence

$$f(m) = 4m^3 - 3m^2 - 10m = 3(y^2 - 1) \pmod{27}.$$

Or, on a

$$y^2 = 0, 1, 4, 7 \pmod{9}, \quad 3(y^2 - 1) = 24, 0, 9, 18 \pmod{27}.$$

Les seules valeurs admissibles de m sont donc celles qui vérifient quelqu'une des congruences

$$f(m) = 0, 9, 18, 24 \pmod{27}.$$

Or

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &= -3 \pm (4 - 10) = 18, 3,\\
f(\pm 2) &= -12 \pm 2(16 - 10) = 0, 3,\\
f(\pm 4) &= 6 \pm 4(54) = 6, 6,\\
f(\pm 5) &= 6 \pm 5(9) = 24, 15,\\
f(\pm 7) &= 15 \pm 7(-3) = 21, 9,\\
f(\pm 8) &= 24 \pm 8(3) = 21, 0,\\
f(\pm 10) &= -3 \pm 10(12) = 9, 12,\\
f(\pm 11) &= -12 \pm 11(15) = 18, 12.\\
f(\pm 13) &= 6 \pm 13(-9) = 24, 15,
\end{aligned}$$

On voit par ce Tableau que l'on doit exclure les valeurs -1, -2, $+4$, -4, -5, 7, 8, -10, -11, -13. De plus, parmi les valeurs de la forme $3l$, on doit exclure celles qui ne vérifient pas la congruence

$$\begin{gathered}
-30l = 3(y^2 - 1) = 0, 9, 18, 24 \pmod{27},\\
-l = 0, 3, 6, 8 \pmod{9}.
\end{gathered}$$

Les seules valeurs de l qui vérifient quelqu'une de ces conditions entre 0 et 9 sont 0, 1, 3, 6; on doit donc exclure les valeurs 2, 4, 5, 7 et 8 de l, et par conséquent les valeurs 6, 12, 15, 21, 24 de m. Toutes les valeurs possibles de m sont donc comprises dans les formules

$$(3) \qquad 27l + (0, 1, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 13, 18, 19, 20).$$

16. En combinant les formules (2) et (3), nous trouvons 72 progressions arithmétiques, dont la raison est 675, et dans lesquelles sont renfermées toutes les valeurs de m qui satisfont au problème proposé. Pour les construire, nous avons d'abord à résoudre l'équation indéterminée

$$(a) \qquad 25x_0 - 27y_0 = 1.$$

On trouve aisément la solution $x_0 = 13$, $y_0 = 12$. Or, si l'on désigne par α l'un des six nombres 0, 1, 5, 10, 15, 20 et par β l'un des douze nombres qui figurent dans la parenthèse de la formule (3), nous devons résoudre l'équation

$$(b) \qquad 25x - 27y = \beta - \alpha,$$

afin de faire accorder les deux formes du nombre m:

$$m = 25x + \alpha = 27y + \beta.$$

Pour cela, multiplions l'équation (a) par $(\beta - \alpha)$ et comparons le résultat avec l'équation (b); nous reconnaissons que cette dernière équation est résolue d'une manière générale par les formules

$$x = 27\lambda + 13(\beta - \alpha), \quad y = 25\lambda + 12(\beta - \alpha);$$

par conséquent toutes les solutions de notre problème sont renfermées dans la formule

$$(c) \qquad m = 675\lambda + 25.13(\beta - \alpha) + \alpha.$$

Si nous voulons obtenir toutes les valeurs positives de m sans

attribuer à λ des valeurs négatives, nous devons réduire le produit $13(\beta-\alpha)$ à son résidu minimum positif suivant le module 27. Pour simplifier cette réduction, nous formons le Tableau des résidus des vingt-six premiers multiples de 13, en écrivant chaque résidu au-dessous du multiplicateur correspondant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	26	12	25	11	24	10	23	9	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8	21	7	20	6	19	5	18	4	17
21	22	23	24	25	26				
3	16	2	15	1	14.				

Nous obtiendrons les formules cherchées en prenant dans ce Tableau le résidu du produit $13(\beta-\alpha)$ au-dessous du nombre auquel se réduit le facteur $\beta-\alpha$ suivant le module 27. Nous partagerons ces formules en six groupes, correspondant chacun à l'une des valeurs de α.

1° $\alpha = 0$:

$$\beta-\alpha=\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 18,\ 19,\ 20,$$
$$13(\beta-\alpha)=0,\ 13,\ 26,\ 12,\ 11,\ 9,\ 22,\ 8,\ 7,\ 18,\ 4,\ 17.$$

I. $\quad m = 675\lambda + 25(0,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 17,\ 18,\ 22,\ 26).$

2° $\alpha = 1$:

$$\beta-1=26,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 17,\ 18,\ 19,$$
$$13(\beta-1)=14,\ 0,\ 13,\ 26,\ 25,\ 23,\ 9,\ 22,\ 21,\ 5,\ 18,\ 4.$$

II. $\quad m = 675\lambda + 25(0,\ 4,\ 5,\ 9,\ 13,\ 14,\ 18,\ 21,\ 22,\ 23,\ 25,\ 26) + 1.$

3° $\alpha = 5$:

$$\beta-5=22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 13,\ 14,\ 15,$$
$$13(\beta-5)=16,\ 2,\ 15,\ 1,\ 0,\ 25,\ 11,\ 24,\ 23,\ 7,\ 20,\ 6.$$

III. $\quad m = 675\lambda + 25(0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 11,\ 15,\ 16,\ 20,\ 23,\ 24,\ 25) + 5.$

4° $\alpha = 10$:

$$\beta - 10 \equiv 17, 18, 19, 20, 22, 26, 0, 1, 3, 8, 9, 10,$$
$$13(\beta - 10) \equiv 5, 18, 4, 17, 16, 14, 0, 13, 12, 23, 9, 22.$$

IV. $m \equiv 675\lambda + 25(0, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23) + 10.$

5° $\alpha = 15$:

$$\beta - 15 \equiv 12, 13, 14, 15, 17, 21, 22, 23, 25, 3, 4, 5,$$
$$13(\beta - 15) \equiv 21, 7, 20, 6, 5, 3, 16, 2, 1, 12, 25, 11.$$

V. $m = 675\lambda + 25(1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25) + 15.$

6° $\alpha = 20$:

$$\beta - 20 \equiv 7, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 0,$$
$$13(\beta - 20) \equiv 10, 23, 9, 22, 21, 19, 5, 18, 17, 1, 14, 0.$$

VI. $m = 675\lambda + 25(0, 1, 5, 9, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23) + 20.$

17. On peut exclure une grande partie des valeurs de m renfermées dans les formules précédentes par la considération de divers modules premiers, en cherchant, non plus les formes linéaires dans lesquelles peuvent être renfermées des solutions de notre problème, mais celles qui n'en renferment aucune. Nous prendrons, à cet effet, l'équation (1) sous la forme que nous lui avons donnée au n° 14, et nous la réduirons suivant le module considéré, comme nous l'avons fait précédemment pour les modules 5 et 27.

En multipliant l'équation (1) par 2 et en la réduisant suivant le module 7, on en déduit

$$f(m) = m^3 - m^2 + 4(m - 1 - y)^2 \pmod{7},$$

Or

$$f(\pm 1) \equiv -1 \pm (1 + 4) \equiv 4, 1,$$
$$f(\pm 2) \equiv -4 \pm 2(1) \equiv 5, 1,$$
$$f(\pm 3) \equiv -2 \pm 3(-1) \equiv 2, 1.$$

D'ailleurs, y^2 ne peut avoir que l'une des valeurs $0, 1, 2, 4 \pmod{7}$:

$1 - y^2$ ne peut avoir que l'une des valeurs 1, 0, 6, 4, ce qui exclut les valeurs 5 et 2. On doit donc rejeter les valeurs de m pour lesquelles $f(m)$ se réduit à l'un des nombres 2 ou 5 suivant le module 7, c'est-à-dire toutes les valeurs comprises dans les formules

$$7x + (2, 3).$$

18. Suivant le module 11, l'équation (1) multipliée par 3 donne la congruence

$$f(m) = m^3 + 6m^2 \equiv 2(1 - y^2).$$

Or on a

$$y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9, \quad 2(1 - y^2) \equiv 0, 2, 5, 6, 3, 7 \pmod{11}.$$

On doit donc rejeter les valeurs de m, pour lesquelles le résidu de $f(m)$, suivant le module 11, est l'un des nombres 1, 4, 8, 9 et 10. Or

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &= \quad 6 \pm 1 \equiv 7, \ 5, \\
f(\pm 2) &\equiv \quad 2 \pm 8 \equiv 10, \ 5, \\
f(\pm 3) &\equiv \quad 10 \pm 5 \equiv 4, \ 5, \\
f(\pm 4) &\equiv - \ 3 \pm 9 \equiv 6, 10, \\
f(\pm 5) &\equiv \quad 7 \pm 4 \equiv 0, \ 3.
\end{aligned}$$

On doit donc exclure les valeurs de m renfermées dans les formules

$$11x + (2, 3, 7).$$

19. On déduit de même de l'équation (1), multipliée par 3 et réduite suivant le module 13, que le nombre m doit vérifier la congruence

$$f(m) = 6m^2 + m(m^2 - 2) \equiv 4(y^2 - 1) \pmod{13}.$$

Les résidus quadratiques de 13 étant 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, les valeurs possibles de $4y^2 - 4$ sont

$$9, 10, 12, 0, 5, 6, 8 \pmod{13}.$$

On doit donc rejeter les valeurs de m pour lesquelles $f(m)$ se réduit à l'un des résidus 1, 2, 3, 4, 7, 11. Or,

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &= 6 \pm (-1) \equiv 5, 7,\\
f(\pm 2) &= 2 \pm 2.2 \equiv 2, 7,\\
f(\pm 3) &= 2 \pm 3(7) \equiv 10, 7,\\
f(\pm 4) &= 5 \pm 4.1 \equiv 9, 1,\\
f(\pm 5) &= -6 \pm 5(-3) \equiv 5, 9,\\
f(\pm 6) &= 8 \pm 6(-5) \equiv 4, 12.
\end{aligned}$$

Les valeurs exclues sont $-1, \pm 2, -3, -4, 6$, auxquelles correspondent respectivement les résidus 7, 2, 7, 7, 1 et 4. Ainsi aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1) n'est renfermée dans la formule

$$13x + (2, 6, 9, 10, 11, 12).$$

20. L'équation (1), multipliée par 4 et réduite suivant le module 17, donne la congruence

$$f(m) = 6m^2 + m(m^2 - 6) \equiv 5(y^2 - 1) \pmod{17}.$$

Comme 5 est non-résidu quadratique de 17, les valeurs de $5y^2$ sont 0 et les non-résidus quadratiques de 17, savoir : 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 et 14. On a, par conséquent,

$$5y^2 - 5 \equiv 12, 15, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 9,$$

de sorte que l'on doit exclure les valeurs de m pour lesquelles le résidu minimum de $f(m)$ (mod. 17) est égal à l'un des nombres 3, 4, 8, 10, 11, 13, 14, 16. Or on trouve

$$\begin{aligned}
f(-1) &\equiv 6 + 5 \equiv 11,\\
f(-2) &\equiv 7 - 2(-2) \equiv 11,\\
f(-3) &\equiv 3 - 3(3) \equiv 11,\\
f(-5) &\equiv 4,\\
f(-7) &\equiv 10.
\end{aligned}$$

On doit donc rejeter toutes les valeurs de m renfermées dans les formules

$$m = 17x + (10, 12, 14, 15, 16).$$

21. Nous prendrons encore le module 23, qui nous donnera un grand nombre de formules d'exclusion. L'équation (1), réduite suivant ce module, donne la congruence

$$f(m) = 4m^3 + m^2 - 2m \equiv 3y^2 - 3 \pmod{23}.$$

Comme 3 est résidu quadratique de 23, $3y^2$ se réduit à l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18 et $3y^2 - 3$ à l'un des nombres 20, 21, 22, 0, 1, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15. On doit donc rejeter les valeurs de m qui donnent à $f(m)$ des valeurs équivalentes aux nombres 2, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19 suivant le module 23. Or on trouve

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &= 1 \pm 2 \equiv 3, 22,\\
f(\pm 2) &= 4 \pm 5 \equiv 9, 22\\
f(\pm 3) &= 9 \pm 10 \equiv 19, 22,\\
f(\pm 4) &= 16 \mp 5 \equiv 11, 21,\\
f(\pm 5) &= 2 \pm 7 \equiv 9, 18,\\
f(\pm 6) &= 13 \pm 1 \equiv 14, 12,\\
f(\pm 7) &= 3 \mp 1 \equiv 2, 4,\\
f(\pm 8) &= -5 \pm 8 \equiv 3, 10,\\
f(\pm 9) &= 12 \pm 0 \equiv 12, 12,\\
f(\pm 10) &= 8 \mp 1 \equiv 9, 7,\\
f(\pm 11) &= 6 \pm 12 \equiv 18, 17.
\end{aligned}$$

On doit donc rejeter les valeurs de m comprises dans la formule

$$23x + (3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18).$$

En réunissant ce résultat à ceux des numéros précédents, nous obtenons ce théorème :

Aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1) *n'est renfermée dans*

l'une des formes linéaires

$$7x + (2, 3),$$
$$11x + (2, 3, 7),$$
$$13x + (2, 6, 9, 10, 11, 12),$$
$$17x + (10, 12, 14, 15, 16),$$
$$23x + (3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18).$$

22. Au moyen de ces formules et d'autres semblables que l'on obtiendrait de la même manière relativement à d'autres modules premiers, on peut exclure le plus grand nombre des termes renfermés dans les six formules du n° **16** et trouver ainsi rapidement toutes les solutions de l'équation (1) en nombres inférieurs à une limite assignée. Afin de ne pas trop allonger ce Mémoire, nous nous contenterons de chercher celles de ces solutions qui sont inférieures à 675 et qui correspondent à la valeur $\lambda = 0$ dans les formules citées.

La formule I se réduit à $25k$, le nombre k ayant les onze valeurs 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 17, 18, 22, 26. On doit rejeter les termes qui vérifient l'une des congruences $4k \equiv 2, 3 \pmod{7}$, $k \equiv 4, 6 \pmod{7}$. Sont exclues de ce chef les valeurs $k = 4, 11, 13, 18$. Il faut y joindre celles qui satisfont à l'une des congruences

$$3k \equiv 2, 3, 7 \pmod{11}, \quad k \equiv 8, 1, 6 \pmod{11};$$

telles sont les valeurs $k = 8, 12$ et 17.

Après ces exclusions, il ne reste que trois valeurs de m, savoir

$$25 \times 5, \quad 25 \times 9, \quad 25 \times 26, \quad 25 \times 22,$$

dont la première est exclue par le théorème du n° 6, puisqu'elle est égale à une puissance d'un nombre premier sans se réduire à 5; les deux suivantes sont inadmissibles, parce qu'elles vérifient les congruences

$$25 \times 9 \equiv 18, \quad 25 \times 26 \equiv 6 \pmod{23};$$

enfin on reconnaît, par le calcul direct, que la dernière valeur, $m = 550$, donne pour n une valeur irrationnelle.

Ainsi la formule I ne renferme, au-dessous de la limite 675, aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1).

23. La formule II, lorsqu'on y fait $\lambda = 0$, renferme douze termes, dont le premier, 1, est une solution de notre problème. Les autres sont

$$25k + 1, \quad k = 4, 5, 9, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25, 26.$$

Nous devons supprimer les termes qui vérifient l'une des congruences

$$4k + 1 \equiv 2, 3 \pmod{7}, \quad k \equiv 2, 4 \pmod{7};$$

tels sont les termes 4, 9, 18, 23 et 25. Ajoutons-y les termes $k = 13$, $k = 26$, car on a

$$25 \times 13 + 1 \equiv 7, \quad 25 \times 26 + 1 \equiv 2 \pmod{11}.$$

La considération du module 13 en exclut deux autres, 5 et 21, car on a

$$25 \times 5 + 1 \equiv 9, \quad 25 \times 21 + 1 \equiv 6 \pmod{13}.$$

Il ne reste ainsi que les deux termes $25 \times 14 + 1$, $25 \times 22 + 1$. Or le premier divisé par 23 donne pour reste 6; on doit le rejeter. Quant au dernier, $m = 25 \times 22 + 1 = 551$, si on le substitue dans l'équation

$$(1) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m = 3(n+1)(n+2),$$

il donne l'équation

$$n^2 + 3n + 2 = 551.6.17051,$$

dont les racines ne sont pas rationnelles. On en déduit, en effet,

$$2n = \pm\sqrt{1 + 24.551.17051} - 3;$$

or le nombre soumis au signe $\sqrt{}$ se réduit à 15 suivant le module 100; il ne peut être un carré, et, par conséquent, le nombre n est irrationnel.

La solution $m = 1$ est donc la seule qui soit renfermée dans la formule II, au-dessous de 675.

24. La formule III renferme une solution que nous connaissons déjà, $m = 5$. Celles qui nous restent à examiner sont

$$25k + 5, \quad k = 1, 2, 6, 7, 11, 15, 16, 20, 23, 24, 25.$$

Supprimons d'abord les termes qui vérifient l'une des congruences

$$\begin{aligned} 2k + 5 &\equiv 3, \ 4, \ 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18 \pmod{23}, \\ k &\equiv 22, 11, 12, 1, 2, \ 3, 15, \ 4, 16, 17, \ 6, 18; \end{aligned}$$

tels sont 1, 2, 6, 11, 15, 16, 24 et 25. Il ne reste que trois termes $k = 7, 20, 23$, dont les deux premiers sont exclus par la considération du module 13, car on a

$$25 \times 7 + 5 \equiv 25 \times 20 + 5 \equiv 11 \pmod{13}.$$

Le troisième, 23, est également inadmissible, car en substituant dans l'équation (1) la valeur correspondante de m, $25 \times 23 + 5 = 20 . 29$, on obtient

$$n^2 + 3n + 2 = 580 < 113297.$$
$$2n = \sqrt{1 + 4 . 580 . 113297} - 3,$$

et l'on constate aisément que la valeur de n n'est pas rationnelle.

La solution $m = 5$ est donc la seule que la formule III puisse nous donner au-dessous de la limite 675.

25. Les termes de la formule IV inférieurs à 675 sont

$$25k + 10, \quad k = 0, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23.$$

Il faut en exclure ceux qui vérifient l'une des congruences

$$4k + 3 \equiv 2, 3 \pmod{7}, \quad k \equiv 5, 0 \pmod{7};$$

tels sont $k = 0, 5, 12, 14$. On doit rejeter encore les termes qui satisfont à l'une des congruences

$$3k - 1 \equiv 2, 3, 7 \pmod{11}, \quad k \equiv 1, 5, 10 \pmod{11},$$

savoir 16 et 23. Les trois termes 4, 13, 17 sont exclus par la considération du module 13, car on a

$$25 \times 4 + 10 \equiv 25 \times 17 + 10 \equiv 6, \quad 25 \times 13 + 10 \equiv 10 \pmod{13}.$$

Enfin le module 17 nous oblige à supprimer deux autres termes, $k = 9$, $k = 22$, car on a

$$25 \times 9 + 10 \equiv 14, \quad 25 \times 22 + 10 \equiv 16 \pmod{17}.$$

Il ne reste ainsi qu'un seul terme, $m = 25 \times 18 + 10 = 460$. En le substituant dans l'équation (1), on obtient

$$n^2 + 3n + 2 = 460 . 3 . 23819,$$
$$2n = \sqrt{1 + 12 . 460 . 23819} - 3,$$

et l'on constate aisément que la valeur de n est irrationnelle. Donc la formule IV ne renferme aucune solution inférieure à 675.

26. Il en est de même de la formule V, dont les termes inférieurs à 675 sont

$$25k + 15, \quad k = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25.$$

Supprimons d'abord ceux qui vérifient l'une des congruences

$$2k - 8 \equiv 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18 \pmod{23},$$
$$k \equiv 17, 6, 7, 19, 20, 21, 10, 22, 11, 12, 1, 13,$$

savoir les sept termes $k = 1, 6, 7, 11, 12, 20$ et 21. Ajoutons-y les trois

termes 2, 16, 25, qui vérifient les congruences

$$25 \times 2 + 15 \equiv 25 \times 16 + 15 \equiv 2, \quad 25 \times 25 + 15 \equiv 3 \pmod{7}.$$

Il ne reste que deux valeurs de m, $25.3 + 15$, $25.5 + 15$; mais elles sont inadmissibles, car, en les divisant par 13, on obtient les restes 12 et 10 respectivement.

27. La formule VI présente une solution connue, $m = 20$. Les autres termes, au-dessous de 675, sont

$$25k + 20, \quad k = 1, 5, 9, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23.$$

Nous devons en exclure les termes qui vérifient quelqu'une des congruences

$$\begin{aligned} -k &\equiv 6 + 2, 6, 9, 10, 11, 12 \pmod{13}, \\ k &\equiv 5, 1, 11, 10, 9, 8; \end{aligned}$$

tels sont les neuf termes 1, 5, 9, 10, 14, 18, 21, 22, 23. Le terme $k = 17$ est exclu par la considération du module 19, car on a

$$25.17 + 20 \equiv 8 \pmod{19};$$

or, si l'on substitue $m \equiv 8 \pmod{19}$ dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} 3(n+1)(n+2) &\equiv 15 \pmod{19}, \\ 4(n+1)(n+2) + 1 &= (2n+3)^2 \equiv 2, \end{aligned}$$

ce qui est impossible, puisque 2 est non-résidu quadratique de 19.

Il ne reste ainsi qu'un seul terme, $k = 19$; mais il est également inadmissible, parce que, si l'on divise par 23 la valeur correspondante de m, savoir $25 \times 19 + 20$, on trouve le reste 12. Donc, parmi les solutions que peut renfermer la formule VI, la solution $m = 20$ est la seule qui soit inférieure à 675.

Nous pouvons réunir les résultats obtenus dans la conclusion suivante :

Si, outre les surfaces du premier, du cinquième et du vingtième degré, il en existe d'autres que l'on puisse rendre osculatrices en des points arbitraires d'une surface donnée, leur degré est supérieur à 675 *et l'ordre de leur contact est supérieur à* 13000.

Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite.

NOTE DU RÉDACTEUR.

M. Catalan, dans une Lettre datée du 17 mars, me fait remarquer qu'il aurait dû être cité dans ma Note *Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite,* insérée au Tome VI de ce Recueil. Il a en effet publié, en 1856, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, une Note *Sur la théorie des roulettes,* dont j'ignorais l'existence, et dans laquelle il a développé le premier une idée bien connue de Sturm, qu'il n'a d'ailleurs pas cité. La priorité est donc acquise à M. Catalan. Qu'il me soit permis d'ajouter, toutefois, que nos deux méthodes n'ont entre elles aucun rapport, que nos formules générales n'ont pas la même forme et que nos exemples sont différents.

A cette occasion, je ferai remarquer que la question que j'ai traitée comme application au n° 4 de ma Note avait été résolue directement et bien antérieurement par M. Bonnet, qui s'était opposé à ce que je fisse à ce sujet une rectification spéciale dans le Journal.

RESAL.

Digression sur les séries;

PAR M. ÉMILE WEST.

Il nous a été fait quelques observations au sujet d'une méthode de Wronski dont nous avons commencé l'exposition; elles se résument en ceci :

Pourquoi n'avoir pas donné la démonstration de la formule (3) ?

Que veut dire : transformation d'une série divergente en série convergente?

Nous devons donner d'abord des explications à cet égard. On a toujours reproché à Wronski, avec raison, de n'avoir jamais donné d'exemples pour éclaircir et même prouver par des faits la réalité des découvertes qu'il avait annoncées. Pénétré de cette idée, nous nous sommes proposé de présenter d'abord un des résultats les plus importants, celui de la résolution ou de l'intégration d'équations quelconques; nous laissons provisoirement de côté tout ce qui se rattache trop particulièrement aux questions de principe ou de théorie, nous réservant de reprendre ces questions, qui forment notre principal travail, dès que nous aurons présenté quelques exemples d'intégration.

La démonstration de la formule (3) exige la connaissance de la théorie des séries de Wronski, théorie que nous exposerons plus tard. Nous ne pouvions donc, sans faire une digression qui nous eût écarté de notre véritable sujet, donner la démonstration de la formule (3). Nous avons pensé que, la formule (2) étant connue depuis longtemps, il suffisait pour l'instant de la présenter, ainsi que la formule (3), en indi-

quant bien que la quantité w, considérée jusqu'à présent comme un nombre arbitraire, doit encore être prise comme une fonction arbitraire. C'est là le point essentiel, que nous demandons au lecteur de vouloir bien admettre provisoirement.

Pour ce qui concerne la deuxième observation, nous aurions dû expliquer le sens dans lequel nous employons l'expression de *transformation de série divergente en série convergente;* mais cela nous eût encore fait retomber sur la théorie des séries. Sans entrer dans les détails et en nous tenant pour l'instant aux exemples, voici ce que nous dirons :

Il existe des transformations de séries connues depuis fort longtemps. M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel* (p. 255), dit, à propos d'une formule de transformation due à Euler : « La transformation d'une série divergente, lors même qu'elle donne naissance à une série convergente, doit être considérée comme insignifiante, à moins qu'une nouvelle démonstration ne vienne lui donner un sens; cette démonstration peut quelquefois être faite, parce que la série transformée et la série primitive, étant démontrées égales lorsque toutes deux sont convergentes, fournissent deux développements de la même fonction. S'il arrive ensuite que l'une d'elles devienne divergente pour une certaine hypothèse, l'autre, demeurant convergente, représentera encore la fonction, justifiant en apparence ceux qui prétendraient que l'autre série la représente encore après être devenue divergente, et qui se trouveraient dans le vrai pour avoir commis la double erreur d'accepter une transformation qui n'est plus légitime et une série qui, étant divergente, ne représente plus rien. » M. Bertrand considère ensuite, à titre d'exemple, la série qui donne $l(1-2x)$. Nous reprendrons tout à l'heure l'exemple de séries logarithmiques.

Ainsi il est connu que l'on peut transformer des séries divergentes en séries convergentes, pourvu que l'on prenne certaines précautions, et quand les développements sont ceux d'une même fonction.

Cette citation suffirait, il nous semble, pour justifier ce que nous avons dit, d'autant plus que nous n'avons parlé que de séries provenant de développements de fonctions.

Pour ce qui concerne Wronski, il faut observer qu'il n'envisage absolument que les séries définies de cette manière; quant aux séries qui

ne se présentent pas immédiatement comme développements de fonctions, par exemple les séries numériques, il les ramène au cas précédent, soit d'après les conditions mêmes de la question, quand cela est possible, soit par une supposition purement arbitraire. Une série quelconque étant alors supposée remplir une première condition reconnue nécessaire, il est permis de chercher un autre développement de la fonction que représente la série. Or la substitution d'une série à une autre est généralement possible, car Wronski démontre, c'est là encore un point essentiel, qu'un développement ne peut représenter à la fois deux fonctions différentes; il en résulte que deux développements d'une même fonction, sans même considérer leur état de convergence ou de divergence, sont bien *équivalents*. Cette équivalence peut se traduire par certaines relations entre les termes correspondants, lesquelles ne sont autres que les formules de transformation.

Pour la transformation des séries numériques, les diverses suppositions que l'on peut faire, d'après Wronski, dans la recherche de la fonction hypothétique, conduiront quelquefois à un résultat unique, et quelquefois à des résultats différents, comme on peut le prévoir; nous en donnerons bientôt un exemple.

On peut dire par abréviation qu'une série, convergente ou non, a généralement une *valeur*, qui est celle de la fonction qu'elle représente, tandis que, en laissant au mot *somme* son sens ordinaire, la *somme d'une série* ne se dira que d'une série convergente.

Revenons à la définition des séries. La manière dont Wronski les envisage permet d'éviter les difficultés que l'on rencontre ordinairement dans l'usage de cet algorithme, et ensuite de pouvoir, comme conséquence éminemment pratique, substituer en général à un développement quelconque donné un développement plus convergent.

Examinons donc ce qui caractérise, d'une part, la définition ordinaire des séries et, d'autre part, celle de Wronski.

On donne habituellement la définition suivante :

Une série est une suite illimitée de termes formés d'après une loi déterminée; elle est *convergente* quand la somme d'un nombre de termes de plus en plus grand, pris dans l'ordre même de la série, tend vers une limite déterminée. Une série est *divergente* quand cette condition n'est pas remplie.

Cette définition est insuffisante, car elle ne remplit pas les conditions que toute définition doit remplir; elle n'apprend rien sur la propriété fondamentale des séries, ou, si l'on veut, sur l'origine même des séries; elle n'implique à proprement parler qu'une *règle de formation des séries*. Aussi n'est-il ordinairement donné que des *règles de convergence*, et les propriétés générales que l'on connaît sont déduites de principes étrangers à la définition précédente des séries.

La définition de Wronski est au contraire une véritable définition; elle contient en elle-même le principe fondamental des séries, celui de représenter une fonction; par suite, ce géomètre déduit de ce seul principe leurs propriétés générales, celles qui sont relatives à leur convergence et à leur transformation.

Nous devons d'abord dire quelques mots sur les développements des fonctions considérés dans toute leur généralité, et nous prévenons expressément que nous ne donnons ce qui suit qu'à seul titre d'indication. Les propositions que nous allons énoncer sont loin d'être évidentes; nous y reviendrons plus tard; en attendant, on pourra consulter la seconde Section de la Technie.

Wronski considère deux sortes de développements des fonctions. Le premier offre une généralité telle, que les séries proprement dites n'en forment plus qu'un cas particulier, comme on va le voir.

Ce premier développement est

$$\alpha \qquad F(x) = A_0 + A_1\Omega_1(x) + A_2\Omega_2(x) + A_3\Omega_3(x) + \ldots;$$

$F(x)$ est la fonction donnée, et $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, ... sont des fonctions généralement *arbitraires*. Pour effectuer leur détermination il faut avoir égard aux conditions du problème, mais celles-ci sont insuffisantes; il faut alors recourir à d'autres conditions qui dépendent du but en vue duquel la question est traitée.

A_0, A_1, A_2, ... sont des coefficients qui dépendent des fonctions susdites. Il suit de là une conséquence importante : une fonction comporte en général un nombre indéfini de formes différentes, autrement dit de développements différents.

Les relations qui existent entre les coefficients A_0, A_1, A_2, ... et les fonctions F, Ω_1, Ω_2, ... constituent ce que Wronski appelle la *loi*

suprême; les déterminations des fonctions Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... les mieux appropriées à la nature de la question constituent la *méthode suprême.*

D'après le même géomètre, les développements en séries ne sont que des cas particuliers du développement précédent (α); si $F(x)$ est la fonction à développer, en effectuant les opérations suivantes

$$(\beta)\qquad \begin{cases} F(x) = A_0 + F_1(x), \\ F_1(x) = \varphi_1(x)[A_1 + F_2(x)], \\ F_2(x) = \varphi_2(x)[A_2 + F_3(x)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ainsi de suite indéfiniment, on obtient le développement que Wronski appelle *série générale :*

$$(\gamma)\quad F(x) = A_0 + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_1(x)\varphi_2(x) + A_3\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x) + \dots.$$

A_0, A_1, A_2, A_3, ... sont des constantes, et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... des fonctions arbitraires de la variable x, qui néanmoins doivent satisfaire à la condition que les rapports

$$(\delta)\qquad \frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)},\quad \frac{F_2(x)}{\varphi_2(x)},\quad \frac{F_3(x)}{\varphi_3(x)},\quad \dots$$

ne soient pas infinis pour les valeurs qui annulent les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... déterminées par les fonctions $F(x)$ et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont d'ailleurs éliminées. Si l'on s'arrête dans la série (γ) après le terme $A_3\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)$, par exemple, la *quantité complémentaire* est

$$F_3(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x),$$

et la partie essentielle de ce reste, $F_3(x)$, est une fonction qui dépend nécessairement de $F(x)$; ainsi la considération de la fonction $F_3(x)$ n'est d'aucune utilité au point de vue théorique, puisqu'en cherchant à l'évaluer on ne peut que retomber sur la question même.

Les relations qui existent entre les coefficients A et les fonctions F et φ constituent la *loi des séries;* ainsi qu'on le verra plus tard, ces coefficients contiennent les différences ou les différentielles de tous les ordres des fonctions F et φ; par suite, la série, étant supposée représenter la fonction $F(x)$, doit contenir les différences ou les différentielles de tous les ordres de la fonction proposée; c'est pour cette raison que l'on ne peut substituer à une série qui contient un nombre indéfini de termes un nombre fini de termes accompagnés d'une quantité complémentaire, autrement dit un polynôme algébrique suivi d'une autre fonction.

Par là même que les termes d'une série sont des fonctions déterminées des dérivées des fonctions F et φ, on ne peut en principe changer l'ordre des termes de la série sans la modifier entièrement; il est évident que cette remarque s'étend aussi aux séries numériques.

Sous la forme donnée (γ), les coefficients A_0, A_1, A_2, ... deviennent indéterminés quand les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, ... deviennent identiques; c'est pourquoi Wronski substitue à (γ) la forme suivante, qui n'offre pas cet inconvénient :

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} F(x) = A_0 + A_1\varphi(x, a, b, \ldots) + A_2\varphi(x, a, b \ldots)^{2\xi,\alpha,\beta,\ldots} \\ \qquad\qquad + A_3\varphi(x, a, b, \ldots)^{3\xi,\alpha,\beta,\ldots} + \ldots \end{cases}$$

Nous employons ici la notation des *facultés algorithmiques*, qui sont définies par la relation

$$(\varepsilon)'\quad \begin{cases} \varphi(x, a, b, \ldots)^{n|\xi,\alpha,\beta,\ldots} \\ \quad = \varphi(x, a, b, \ldots)\,\varphi(x+\xi, a+\alpha, b+\beta, \ldots) \\ \qquad \times \varphi(x+2\xi, a+2\alpha, b+2\beta, \ldots)\ldots \\ \qquad \times \varphi[x+(n-1)\xi, a+(n-1)\alpha, b+(n-1)\beta, \ldots]. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'une fonction arbitraire φ, que Wronski nomme *mesure* de la série, mais il entre dans cette fonction un nombre indéfini de paramètres arbitraires a, b, ..., ainsi que leurs accroissements α, β, ...

Maintenant considérons le cas particulier dans lequel les paramètres

restent constants :

$$(\zeta) \qquad F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^{2\xi} + A_3 \varphi(x)^{3\xi} + \ldots,$$

et même celui-ci

$$(\eta) \qquad F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^2 + A_2 \varphi(x)^3 + \ldots,$$

dans lequel l'accroissement fini ξ devient indéfiniment petit dx.

Quand la série contient des facultés algorithmiques, la loi de la série contient les différences des fonctions F et φ; quand les facultés se réduisent à de simples puissances, comme pour la série (η), les différences deviennent des différentielles.

Il ne faut pas confondre le développement (α) avec la série (γ), comme Lacroix avait cru pouvoir le faire; la série (γ) est un cas particulier du développement (α).

Le principe de la convergence des séries de Wronski dérive de leur définition; ce principe s'exprime algébriquement par la condition que les rapports (δ) tendent vers des quantités constantes.

Seconde conséquence importante : la fonction $F(x)$ se trouve complètement déterminée par l'ensemble des coefficients du développement, car aucune autre fonction, dans le procédé indiqué, ne saurait donner la même suite de coefficients et la même loi de leur génération. Ainsi, quel que soit l'état de convergence ou de divergence de la série, la loi des coefficients donne la détermination rigoureuse de la série, sans addition d'aucune quantité complémentaire.

Wronski résume ce qui précède dans la proposition suivante :

Les séries prises dans leur généralité comme convergentes ou non convergentes ont par elles-mêmes, dans le nombre indéfini de leurs termes, et sans le secours d'aucune quantité complémentaire, une signification (valeur) déterminée.

Wronski ajoute que la démonstration mathématique de cette proposition se réduit à montrer que l'on peut généralement substituer une série convergente à une série divergente.

Si l'on considère maintenant une série numérique, elle provient ou d'une série contenant une variable (ou plusieurs) à laquelle on donne une valeur particulière, ou bien elle est formée directement par une suite de nombres donnés par une certaine loi.

Dans ce dernier cas, si la série est divergente, c'est-à-dire si l'on ne peut faire la sommation des termes, il n'y a rien à en tirer sans une supposition particulière. Si l'on admet alors qu'une telle suite puisse provenir d'une série contenant une variable, il se présente la question de rechercher quelle est la fonction qu'elle peut représenter; il y a quelquefois utilité à le faire; on peut alors, d'après l'hypothèse, substituer à une série numérique une autre qui lui sera équivalente.

Il nous reste donc à examiner comment on peut passer d'une série à une autre équivalente. Soit donnée la série

$$(6) \qquad F(x) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 f(x) + \mathfrak{A}_2 f(x)^{2|\xi} + \mathfrak{A}_3 f(x)^{3|\xi} + \ldots.$$

Wronski trouve que dans la série par hypothèse équivalente

$$(6') \qquad F(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^{2|\xi} + A_3 \varphi(x)^{3|\xi} + \ldots$$

la fonction arbitraire $\varphi(x)$ peut se ramener à quatre types différents, qu'il nomme *schémas de convergence*. Le plus usuel est de la forme

$$\frac{x}{n+x} - \frac{a}{n+a} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{n+a}\left(\frac{x-a}{n+x}\right),$$

n et a étant des constantes arbitraires. Prenons pour exemple le cas le plus simple, celui où la série (6) se réduit à la série de Taylor, savoir

$$(t) \qquad F(x) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1(x-a) + \mathfrak{A}_2(x-a)^2 + \mathfrak{A}_3(x-a)^3 + \ldots;$$

la série équivalente sera, en faisant $\varphi(x) = \frac{x-a}{n+x}$,

$$(t') \qquad F(x) = A_0 + A_1\frac{x-a}{n+x} + A_2\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2 + A_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \cdots;$$

les relations entre les coefficients $\mathfrak{A}$ et A seront

$$(\iota)'' \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{A}_0 = A_0, \\ &\mathfrak{A}_1(n+a) = A_1, \\ &\mathfrak{A}_2(n+a)^2 = A_2 - A_1, \\ &\mathfrak{A}_3(n+a)^3 = A_3 - 2A_2 + A_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\mathfrak{A}_\mu(n+a)^\mu = A_\mu - \frac{\mu-1}{1}A_{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}A_{\mu-2} \\ &\qquad - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}A_{\mu-3} + \dots \end{aligned} \right.$$

Il peut être utile de connaître directement le coefficient général de la seconde série (ι) : on a, d'après la première $(\iota)'$

$$\mathfrak{A}_\mu = \frac{1}{1.2.3\dots\mu}\frac{d^\mu F(a)}{da^\mu},$$

puis, en résolvant le système des équations $(\iota)''$,

$$(\varkappa) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\mu = &(n+a)\mathfrak{A}_1 + \frac{\mu-1}{1}(n+a)^2\mathfrak{A}_2 \\ &+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(n+a)^3\mathfrak{A}_3 + \dots \end{aligned} \right.$$

La série de Taylor (ι) pouvant en général représenter toute fonction, Wronski énonce encore la proposition suivante :

Toute fonction algorithmique $F(x)$ *peut, avec une mesure généralement* FINIE $(x-a)$, *être engendrée moyennant une série convergente.*

Revenons aux séries formées par une suite de nombres arbitraires : soit

$$(\lambda) \qquad \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots$$

une pareille série; nous avons dit que nous supposions une série pro-

prement dite, dont la valeur générale corresponde à une fonction hypothétique $F(x)$, par exemple la série formant le second membre de (ι); il faut observer que la supposition ne saurait avoir lieu effectivement qu'autant qu'il existe une autre fonction $\varphi(x)$ qui puisse donner réellement une suite $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ correspondant à une série convergente telle que le second membre de $(\iota)'$. Si cela n'a pas lieu, les quantités A seront ou infinies ou indéterminées, ou bien elles pourront donner lieu à des absurdités. D'où cette proposition :

Une série (λ), *formée arbitrairement* [1], *n'a pas toujours une valeur générale* $F(x)$ *correspondant à toutes les valeurs de la variable* x.

Wronski donne un exemple d'une série telle que (λ), dont les termes sont formés d'après une loi qui n'admet pas une série générale de la forme (θ); cela suffit pour prouver la dernière proposition.

Premier exemple. — Pour bien faire comprendre ce que nous venons de dire, prenons un exemple connu, le développement du logarithme naturel de x, ou

$$(\mu) \qquad L(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots$$

Cette série n'est convergente qu'entre 0 et 2; mais, d'après ce que nous avons dit, elle représentera *dans tous les cas* la fonction $L(x)$, parce qu'aucune autre fonction ne peut donner le même développement. Quand cette série est divergente, elle ne peut être évidemment d'aucune utilité pour calculer un logarithme : c'est dans ce cas que les formules $(\iota)''$ ou $(\varkappa)$ permettent d'y substituer immédiatement une série convergente; on a, d'après $(\varkappa)$, en comparant la série (μ) à la série (ι) et faisant $n = 1$,

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2\frac{1}{3}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 2\frac{1}{5}, \ldots,$$

ce qui donne pour la série $(\iota)'$

$$(\mu)' \qquad 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

---

[1] *Formée arbitrairement* signifie : formée d'après une loi arbitraire.

série bien connue qui est convergente pour toutes les valeurs positives de x.

Pour les valeurs négatives de x, la série proposée et cette dernière sont divergentes; les formules ($\varkappa$), telles que nous venons de les appliquer, ne pourraient conduire à des séries convergentes, parce que le logarithme d'un nombre négatif, étant imaginaire, ne pourrait être donné par une série dont la valeur serait réelle; il faudrait, pour obtenir un résultat, introduire des quantités imaginaires, lesquelles donneraient lieu à deux séries convergentes A et B, permettant de former la quantité cherchée $A + B\sqrt{-1}$. Nous allons examiner cette transformation sur un autre exemple.

La série proposée (μ), pour $x = 0$, donne la série harmonique

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right),$$

dont la somme des termes entre parenthèses est plus grande que toute quantité donnée; la série $(\mu)'$ conduit à un résultat pareil. Or cette quantité infinie est bien à la fois la somme de la série et la valeur de $L(0)$; on ne peut donc pas dire que la série harmonique soit ici divergente, ou bien, si l'on dit que cette série est divergente, il faut reconnaître que cette divergence n'est pas de même nature que celle de la série qui donne, par exemple, le logarithme de 11,

$$(\nu) \qquad 10 - \frac{1}{2}\cdot 10^2 + \frac{1}{3}\cdot 10^3 - \frac{1}{4}\cdot 10^4 + \cdots,$$

puisque cette série ne peut donner par elle-même la valeur du logarithme. La série numérique (ν), en vertu de sa liaison avec la fonction Lx, est équivalente à la série convergente

$$(\nu)' \qquad 2\left(\frac{10}{12} + \frac{1000}{3.1728} + \frac{100000}{5.248832} + \cdots\right),$$

donnée par la série $(\mu)'$.

Second exemple. — Pour second exemple prenons la série provenant

du développement de $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$.

$$(\xi)\qquad 1 - x - \frac{1}{2}\frac{1}{1}x^2 - \frac{1}{3}\frac{1.3}{1.2}x^3 - \frac{1}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3}x^4 - \ldots.$$

Pour $x = 1$, la valeur de la fonction $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$ est $\sqrt{-1}$; de plus, la série est divergente, elle devient

$$(\varpi)\qquad 1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\frac{1.3}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3} - \ldots.$$

Comparons cette série à la série (ι); en faisant $a = 0$, les coefficients seront $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ...; puis substituons-y la série $(\iota)'$. Pour cela posons,

$$u = -\frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

et, observant que

$$\frac{x}{x - \frac{1}{2}\sqrt{-1}} = \frac{2x(2x+\sqrt{-1})}{4x^2+1},$$

la nouvelle série sera

$$(\xi)'\qquad A_0 + A_1\frac{2x(2x+\sqrt{-1})}{4x^2+1} + A_2\frac{2^2x^2(2x+\sqrt{-1})^2}{(4x^2+1)^2} + \ldots.$$

On trouverait pour les coefficients

$$A_0 = 1,\quad A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-1},\quad A_2 = \frac{1}{2^3}(1+4\sqrt{-1}),$$

$$A_3 = \frac{1}{2^4}(4+7\sqrt{-1}),\quad A_4 = \frac{1}{2^7}(13+40\sqrt{-1}),$$

$$A_5 = \frac{1}{2^8}(88+39\sqrt{-1}),\quad A_6 = \frac{1}{2^{10}}(261+12\sqrt{-1}),$$

$$A_7 = \frac{1}{2^{11}}(188-89\sqrt{-1}),\quad A_8 = \frac{1}{2^{15}}(-2445+1040\sqrt{-1}),$$

et ainsi de suite; la série (ϖ) devient

$$(\varpi)' \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\sqrt{-1}(2+\sqrt{-1})}{5} + \frac{(1+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})^2}{2.5^2} \\ & \qquad + \frac{(4+7\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})^3}{2.5^3} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(\varpi)'' \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{13}{2.5^2} - \frac{69}{2.5^3} - \frac{1261}{2^3.5^4} - \frac{4943}{2^4.5^6} - \frac{54845}{2^4.5^7} + \frac{1637955}{2^7.5^8} + \ldots\right) \\ & + \sqrt{-1}\left(\frac{2}{5} + \frac{16}{2.5^2} + \frac{58}{2.5^3} + \frac{752}{2^3.5^4} + \frac{2126}{2^3.5^5} + \frac{10080}{2^4.5^6} + \frac{19290}{2^4.5^7} + \frac{273440}{2^7.5^8} + \ldots\right). \end{aligned} \right.$$

Ces deux séries sont très peu convergentes; elles oscillent, la première autour de zéro, et la seconde autour de l'unité, en tendant respectivement vers ces valeurs. Wronski donne les valeurs suivantes :

Pour 2 termes.....	$+\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{-1}$,
3 »	$+\frac{7}{13} + \frac{5}{7}\sqrt{-1}$,
4 »	$+\frac{5}{19} + \frac{20}{21}\sqrt{-1}$,
5 »	$+\frac{1}{85} + \left(1 + \frac{4}{39}\right)\sqrt{-1}$,
6 »	$+\frac{3}{16} + \left(1 + \frac{3}{16}\right)\sqrt{-1}$,
.....	
11 »	$-\frac{2}{75} + \left(1 + \frac{31}{123}\right)\sqrt{-1}$,
12 »	$+\frac{7}{76} + \left(1 + \frac{7}{29}\right)\sqrt{-1}$,

Troisième exemple. — Considérons pour dernier exemple la série

$$(\rho) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots;$$

admettons qu'elle provienne du développement de $\frac{1}{1+x}$

$$(\sigma) \qquad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

pour la valeur $x = 1$. En comparant cette série (σ) à (ι), on pourra, au moyen des formules $(\varkappa)$, y substituer la série équivalente $(\iota)'$, dont les coefficients sont ici

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -n, \quad A_2 = n^2 - n,$$
$$A_3 = -n^3 + 2n^2 - n, \quad A_4 = n^4 - 3n^3 + 3n^2 - n, \ldots;$$

par suite on a la série transformée

$$(\sigma)' \quad 1 - n\frac{x}{n+x} + n(n-1)\frac{x^2}{(n+x)^2} - n(n-1)^2\frac{x^3}{(n+x)^3} + \cdots,$$

série évidemment convergente pour $x = 1$, quelle que soit la valeur positive et finie de n, et dont la valeur est $\frac{1}{2}$:

$$(\rho)' \qquad 1 - \frac{n}{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} - \frac{n(n-1)^2}{(n+1)^3} + \frac{n(n-1)^3}{(n+1)^4} - \cdots$$

ou

$$1 - \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \cdots\right],$$

ou enfin

$$1 - \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2},$$

Si $n = 1$, la série $(\sigma)'$ se réduit à

$$1 - \frac{x}{1+x}.$$

Faisons maintenant une seconde hypothèse sur l'origine de la série (ρ): on peut admettre qu'elle provienne du développement de

$\frac{1}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire de la série

$$(\tau) \qquad 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Il est évident que pour $x = 1$ la série s'identifie avec la série (ρ), tandis que la fonction dont la série (τ) est le développement prend la valeur $\frac{1}{3}$ différente de celle qui précède; de même, si l'on considérait le développement de $\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire

$$(\varphi) \qquad 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \ldots,$$

qui se réduit également à la série (ρ) quand $x = 1$, on aurait encore une valeur différente $\frac{2}{3}$; quant aux formules de transformation, elles donneraient respectivement, en faisant $n = 1$,

$$(\tau)' \quad 1 - \frac{x}{1+x} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^7 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^8 + \cdots,$$

$$(\varphi)' \quad 1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^5 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^6 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^8 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^9 + \cdots,$$

series convergentes pour $x = 1$; elles donnent, en effet,

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^8} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9} + \cdots.$$

L'exemple des séries (σ), (τ) et (φ), donnant pour $x = 1$ la même suite (ρ) avec des valeurs différentes, est dû à Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XII, p. 428). Wronski donne la transformation de la série (σ) en $(\sigma)'$ et celle de la série logarithmique qui conduit à la série bien connue $(\mu)'$. Il donne encore l'exemple suivant. La série

$$(\chi) \qquad 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \ldots$$

peut dériver de

$$(\psi) \qquad 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \ldots$$

ou de

$$(\omega) \qquad 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Ces deux séries proviennent respectivement du développement de $\frac{1+x}{1-x^2}$ et de celui de $\frac{1+x}{1+x^3}$, expressions dont les valeurs sont l'unité pour $x = 1$. Les séries (ψ) et (ω) donnent pour transformées, en faisant $n = 1$,

$$(\psi)' \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{x}{1+x} - 2\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - 4\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \\ - 4\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 + 8\left(\frac{x}{1+x}\right)^7 + \cdots, \end{array}\right.$$

$$(\omega)' \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \\ - 9\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - 18\left(\frac{x}{1+x}\right)^6 - \cdots, \end{array}\right.$$

séries convergentes pour $x = 1$; elles se réduisent en effet à l'unité,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{64} - \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^4} - \frac{3^2}{2^5} - \frac{3^2}{2^5} - \cdots.$$

Nous pensons que ces exemples très simples suffiront pour montrer la possibilité de *substituer* une série convergente à une série divergente, ou de *transformer* les séries, suivant l'expression de Wronski. Ces exemples montrent aussi comment on peut évaluer des séries numériques en les rapportant à une série générale hypothétique.

En terminant ce court exposé, nous ferons observer que les formules $(\varkappa)$ que nous avons données, se rapportant aux deux séries (ι) et $(\iota)'$, ne sont pas les plus générales que l'on puisse admettre; elles peuvent se trouver en défaut dans certains cas; il faut alors recourir à d'autres

formules ou même essayer les autres schémas de convergence, parmi lesquels, suivant Wronski, on en trouvera toujours un qui réponde à la question proposée.

Ajoutons encore que les deux quantités arbitraires a et n que renferme la série $(\iota)'$ permettent d'augmenter dans certaines limites la convergence du développement de la fonction $F(x)$; ainsi, en laissant à a la valeur 1 et en faisant $n = 0$, on obtient pour le logarithme de 2 un développement moins convergent que le développement $(\mu)'$, où $n = 1$. Il est bien entendu qu'il ne faut pas ici considérer le même nombre de termes, mais il faut prendre, dans chaque série, tous les termes qui précèdent ceux d'une même puissance de $\frac{x-a}{n+x}$, à laquelle on s'arrête.

Parmi tous les développements d'une même fonction, il en existe un qui possède le maximum de convergence; ce développement peut même quelquefois être limité. Ainsi, au moyen de la série $(\iota)'$, nous obtenons un nombre infini de développements de la fonction $L(x)$; mais, comme on le sait, on en trouverait encore d'autres; l'expression (α) permet d'obtenir tous ceux que l'on désire. Par exemple, si l'on compare $(\iota)'$ et (α), on a

$$\Omega_1(x) = \frac{x-a}{n+x}, \quad \Omega_2(x) = \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2, \quad \Omega_3(x) = \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3, \quad \ldots$$

Les fonctions Ω étant toutes arbitraires, nous pouvons admettre que la première quantité n qui entre dans la première fonction Ω_1 soit différente des autres quantités, désignées aussi par n, qui entrent dans les fonctions Ω_2, Ω_3, ...; nous distinguerons la première quantité n par l'indice 1. Cette quantité n_1, complètement arbitraire, peut être généralement une fonction de x; en la déterminant par la condition que $\Omega_1(x)$ représente le mieux possible la fonction $F(x)$, la série complémentaire aura relativement une valeur minima.

D'après cela, il faut satisfaire à la relation

$$d\Omega_1(x)\, d^2F(x) - d^2\Omega_1(x)\, dF(x) = 0,$$

ce qui donne

$$(n_1 + x)\frac{d^2F(x)}{dx^2} + 2\frac{dF(x)}{dx} = 0.$$

Ici les coefficients de la série complémentaire diffèrent de ceux de la

série $(\iota)'$. On trouverait

$$(\alpha\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(a) + \frac{dF(a)}{da}\left[1 - (x-a)\frac{d^2F(x)}{dx^2}\,\frac{1}{2\dfrac{dF(x)}{dx}}\right](x-a) \\ &\quad + \Xi_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \Xi_4\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^4 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

en faisant

$$(\alpha\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \Xi_{\mu+1} &= (n+a)^{\mu+1}\left\{\frac{1}{1^{\mu+1}\,|\,1}\,\frac{d^{\mu+1}F(a)}{da^{\mu+1}} - 2\frac{dF(a)}{da}\,\frac{d^{\mu-1}}{da^{\mu-1}}\left[\frac{d^2F(a)}{d^2a}\,\frac{1}{\dfrac{dF(a)}{da}}\right]\right\} \\ &\quad + \frac{\mu}{1}\,\Xi_\mu - \frac{\mu^{2|-1}}{1^{2|1}}\,\Xi_{\mu-1} + \frac{\mu^{3|-1}}{1^{3|1}}\,\Xi_{\mu-2} - \ldots + (-1)^{\mu-4}\,\frac{\mu^{\mu-2|-1}}{1^{\mu-2|1}}\,\Xi_3. \end{aligned}\right.$$

En prenant $n = a$, le développement du logarithme de x devient

$$(\alpha\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} L(x) &= L(a) + \frac{(x+a)(x-a)}{2ax} \\ &\quad - 4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \cdots\right]. \end{aligned}\right.$$

Pour l'instant, nous ne pouvons donner plus de détails sur ce sujet, qui se trouve traité dans le Tome I de la *Réforme* ou à la fin du troisième Volume de l'*Encyclopédie de Montferrier*.

Nous pensons que cette digression suffit provisoirement pour répondre aux observations que nous avons reçues et dont nous nous sommes efforcé de tenir compte. Le sujet que nous traitons offre des difficultés toutes particulières, et nous n'ignorons pas que la tâche est difficile; nous sommes persuadé, en l'entreprenant, que nous contribuerons à faire connaître des résultats d'une haute importance et d'un intérêt immédiat; aussi demanderons-nous toute l'indulgence du lecteur. Nous accueillerons avec reconnaissance les observations que l'on voudra bien nous transmettre, s'il nous arrivait encore d'employer, par suite de quelque inadvertance, des expressions dont la signification ne paraîtrait pas suffisamment précise, ou même des expressions incorrectes.

Recherches sur l'Électrodynamique;

PAR M. H. RESAL.

1. Élève de la première division de l'École Polytechnique en 1849, les leçons de Physique de Bravais avaient déterminé en moi une véritable passion pour la théorie de l'Électrodynamique. C'est ainsi que j'ai été conduit à chercher s'il ne serait pas possible d'apporter quelques simplifications dans les calculs assez longs et pénibles d'Ampère, l'illustre fondateur de cette théorie, développée plus tard par plusieurs savants, parmi lesquels Savary et Demonferrand figurent en première ligne. Mes recherches ont abouti dans certaines limites et font l'objet de cette Note; elles ont été adoptées en partie par Bravais dans son cours de 1850, puis publiées plus tard, ou plutôt enterrées, par extrait, dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* (1854). J'ose espérer que cette exhumation sera accueillie avec faveur par quelques-uns de nos lecteurs. J'ai apporté d'ailleurs, dans cette nouvelle rédaction, de notables perfectionnements.

2. *Premiers faits sur lesquels s'appuie l'hypothèse d'Ampère.* — L'expérience nous apprend que :

1° L'action d'un courant rectiligne peut, en toute circonstance, être substituée à celle d'un courant sinueux dont la forme en diffère très peu et dont l'intensité est la même.

2° L'attraction ou la répulsion mutuelle de deux courants agissant

l'un sur l'autre se transforme, par un changement de sens dans l'un d'eux, en répulsion ou en attraction.

3° Deux courants rectilignes parallèles s'attirent ou se repoussent selon qu'ils sont de même sens ou de sens contraires.

5. *Conséquence.* — Il résulte du premier de ces faits que, *si l'on considère un courant de forme quelconque comme étant composé d'éléments rectilignes, on peut substituer à chacun de ces éléments un ensemble de courants de même intensité, et dont il est la somme géométrique.*

On voit, d'après ce principe, que l'on arrivera à déterminer l'action réciproque de deux courants de forme quelconque lorsque l'on connaîtra la loi suivant laquelle s'exerce l'action mutuelle de deux éléments de courant.

Pour arriver à la connaissance de cette loi élémentaire, nous admettrons que *l'action ci-dessus s'exerce suivant la droite qui joint les extrémités des deux éléments par lesquelles les courants arrivent* [1].

Du second des faits ci-dessus énoncés on déduit qu'*un élément de courant ab n'exerce aucune action sur un autre élément de courant a'b' situé dans un plan mené normalement à l'extrémité a du premier, par laquelle arrive le courant.* En effet, si, par exemple, il y avait une attraction dirigée suivant aa', en faisant subir au plan $aa'b'$, entraînant avec lui $a'b'$, une demi-révolution autour de ab, l'action mutuelle resterait toujours une attraction, tandis que l'élément $a'b'$ prendrait, par rapport à ab, une position inverse de celle qu'il avait d'abord : or, d'après l'observation, l'attraction devrait se transformer en répulsion, ce qui est absurde.

6. *Action mutuelle de deux éléments de courants.* — Soient (*fig.* 1)

$ab = ds$, $a'b' = ds'$ deux éléments de courants dont les intensités respectives sont i et i' ;

$r = aa'$ la droite qui joint les extrémités de ces éléments par lesquelles arrivent les courants ;

[1] Ampère admettait que cette droite joignait les milieux des deux éléments en présence. La différence entre les deux conventions repose sur une subtilité à laquelle il n'y a pas lieu de s'arrêter.

α, α' les angles formés par ab, $a'b'$ avec aa' et $a'a$;
θ l'angle dièdre déterminé par les deux plans baa', $b'a'a$.

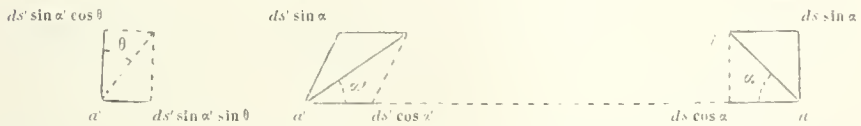
Nous pouvons substituer à l'élément ds ses deux composantes $ds\cos\alpha$, dirigée suivant aa', et $ds\sin\alpha$, dirigée normalement à cette direction. Nous pouvons de même substituer à ds' deux composantes, l'une, $ds'\cos\alpha'$, dirigée suivant $a'a$, et l'autre, $ds'\sin\alpha'$, perpendiculaire à la première.

L'élément $ds'\sin\alpha'$ se décompose en deux autres, l'un, $ds'\sin\alpha'\cos\theta$, parallèle à $ds\sin\alpha$, et l'autre, $ds'\sin\alpha'\sin\theta$, perpendiculaire au plan $a'ab$.

D'après ce que nous avons vu à la fin du n° 5, $ds'\sin\alpha'\sin\theta$ n'exerce aucune action sur $ds\sin\alpha$, $ds\cos\alpha$, et par suite sur ds.

L'action de l'élément $ds'\sin\alpha'\cos\theta$ sur ds se réduit à celle qu'il

Fig. 1.



exerce sur l'élément $ds\sin\alpha$, qui lui est parallèle. Nous supposerons que cette action est proportionnelle au produit des deux éléments et des intensités des courants, et en raison inverse d'une certaine puissance n de la distance r, de sorte que nous pourrons la représenter par

$$(a) \qquad ii'\,\frac{ds\,ds'\sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta}{r^n}.$$

Nous conviendrons de considérer cette même action comme positive si c'est une attraction ou si $ds'\sin\alpha'\cos\theta$ et $ds\sin\alpha$ sont traversés dans le même sens par les courants; le signe du produit $\sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta$ fera d'ailleurs connaître s'il s'agit d'une attraction ou d'une répulsion.

Il nous reste maintenant à tenir compte de l'action de $ds'\cos\alpha'$ sur $ds\cos\alpha$. Nous admettrons, comme ci-dessus, que cette action est proportionnelle au produit de ces éléments par ii' et varie en raison inverse de r^n; si nous désignons par k le rapport, supposé constant, entre les actions de deux éléments en ligne droite de sens contraires et de deux éléments parallèles de même sens, toutes choses égales d'ailleurs, nous

aurons, pour l'action dont il s'agit,

$$(b) \qquad \frac{k i i' ds\, ds' \cos\alpha \cos\alpha'}{r^n}.$$

L'action totale de ds' sur ds ou la somme des expressions (a) et (b) sera ainsi représentée par

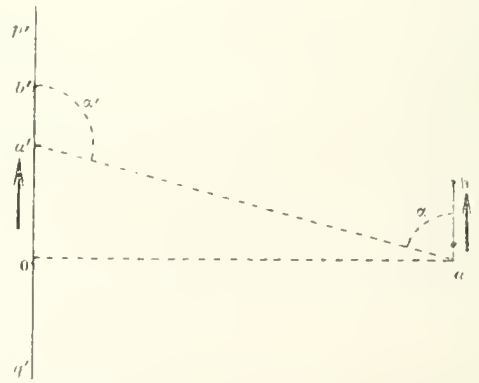
$$c \qquad \frac{i i' ds\, ds'}{r^n} (k \cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha' \cos\delta).$$

Les hypothèses sur lesquelles repose cette formule ne peuvent recevoir leur justification que par la concordance entre les résultats auxquels elle conduit et ceux que l'on déduit de l'expérience dans tous les cas qui peuvent se présenter.

3. *Détermination de la constante n.* — Ampère a obtenu la valeur de cette constante en partant de ce fait qu'*un courant rectiligne p'q', assez long pour qu'on puisse le considérer comme infini, exerce sur un courant rectiligne fini pq qui lui est parallèle une action qui varie en raison inverse de la distance des deux courants*, action qui est d'ailleurs attractive ou répulsive selon que les courants sont ou non de même sens.

Admettons (*fig.* 2) que pq se réduise à un élément $ab = ds$. Soient

Fig. 2.



$l = Oa$ la distance de a à $p'q'$; $a'b' = ds'$ un élément de $p'q'$. Nous

avons $\theta = 0$, et en ce qui concerne ab et $a'b'$,

$$baa' = \alpha, \quad b'a'a = \alpha' = 180^\circ - \alpha, \quad r = aa' = \frac{l}{\sin\alpha},$$
$$s' = Oa' = l\cot\alpha, \quad ds' = \frac{l\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

L'attraction, si l'on admet que les deux courants soient de même sens, de $p'q'$ sur ab sera évidemment dirigée suivant aO, et la formule (c) donne, pour la composante suivant cette dernière direction de l'attraction produite par $a'b'$,

$$-\frac{ii'\,ds}{l^{n-1}}\sin^{n-2}\alpha(-k\cos^2\alpha + \sin^2\alpha),$$

d'où, pour l'action totale exercée par $p'q'$ sur ab,

$$(d) \qquad -\frac{2ii'\,ds}{l^{n-1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^{n-2}\alpha(-k\sin^2\alpha + \sin^2\alpha)\,d\alpha.$$

Ce résultat, comparé à celui de l'expérience, conduit à poser $n = 2$, et la formule (c) devient ainsi

$$(e) \qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha'\cos\theta).$$

6. *Détermination de la constante k.* — On déduit de l'expérience que *l'action d'un courant fermé sur un courant en arc de cercle est normale à cet arc en son milieu*, et, comme conséquence, que *l'action d'un courant fermé sur un élément de courant est normale à cet élément.*

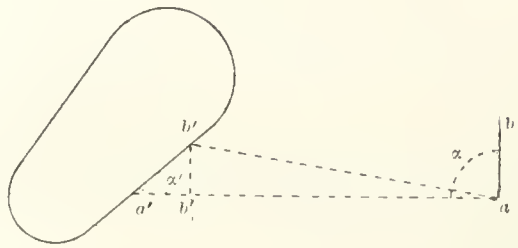
Soient (*fig.* 3)

$a'b' = ds'$ un élément du courant fermé ;
$ab = ds$ l'élément sur lequel agit ce courant ;
b'_1 la projection de b' sur $a'a$.

Conservons d'ailleurs les notations qui précèdent.

En vertu de la formule (e), la composante de l'action exercée

Fig. 3.



par $a'b'$ sur l'élément ab, estimée suivant cet élément, a pour expression

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta\right)\cos\alpha.$$

Or on a

$$ds' = \frac{a'b'_1}{\cos\alpha'} = -\frac{dr}{\cos\alpha},$$

et l'expression ci-dessus devient

$$(f)\qquad ii'\,ds\left(k\cos^2\alpha\,d\frac{1}{r} - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha'\cos\theta\,\frac{dr}{r^2}\right).$$

L'angle trièdre forme par les directions des droites aa', ab', ab donne

$$(g)\qquad \cos\widehat{bab'} = \cos\widehat{baa'}\cos\widehat{b'aa'} + \sin\widehat{baa'}\sin\widehat{b'aa'}\cos\theta.$$

Or on a

$$\widehat{bab'} = \alpha + d\alpha,\quad \cos\widehat{bab'} = \cos\alpha + d\cos\alpha,$$

$$\widehat{b'aa'} = \frac{b'b'_1}{r} = -\frac{dr}{r}\,\mathrm{tang}\,\alpha',$$

et la formule (g) se réduit à la suivante :

$$d\cos\alpha = -\frac{dr}{r}\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha'\cos\theta.$$

En ayant égard à cette relation, l'expression (f) devient

$$ii'\,ds\left(k\cos^2\alpha\,d\frac{1}{r}+\frac{1}{2r}\,d\cos^2\alpha\right).$$

Si l'on intègre cette expression et le premier terme par parties, on trouve, pour un courant quelconque fermé ou non,

$$(h)\qquad ii'\,ds\left|\frac{k}{r}\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{2}-k\right)\int\frac{d\cos^2\alpha}{r}\right|+\text{const C}.$$

Cette intégrale doit être nulle, en partant d'un point d'un courant fermé pour revenir au même point, quelle que soit la forme du courant ou la relation qui doit exister entre r et α. Or, le premier terme donnant un résultat nul, il faut, pour que le second terme s'annule, que l'on ait

$$k=\frac{1}{2},$$

et alors l'expression (c) se réduit à la suivante :

$$(1)\qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{2}+\sin\alpha\sin\alpha'\cos\delta\right).$$

Remarque. — La valeur positive obtenue pour k signifie que l'action mutuelle de deux éléments de courants en ligne droite est une attraction ou une répulsion, selon que les deux courants sont de sens contraire ou de même sens.

7. *Nouvelle expression de l'action mutuelle de deux éléments de courants* — Considérons un courant quelconque non fermé, auquel la formule (h) est applicable. En faisant dans cette formule $k=\frac{1}{2}$, on obtient pour la composante suivant ds de l'action exercée par le courant sur cet élément

$$\frac{ii'}{2}\frac{ds}{r}\cos^2\alpha+\text{C}.$$

Si le courant se réduit à un élément ds', cette composante se réduit

elle-même à

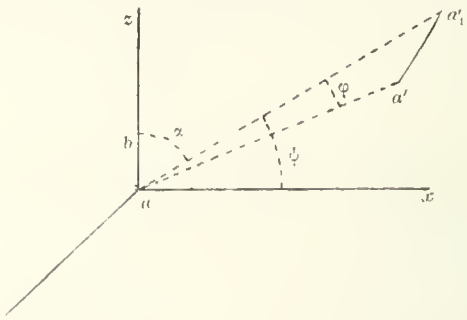
$$\frac{ii'}{2}\, ds\, d\,\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

Enfin l'action totale de ds' sur ds suivant la direction de r a pour expression

$$(2)\qquad \frac{ii'}{2}\,\frac{ds}{\cos\alpha}\, d\,\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

8. *Action d'un courant fermé sur un élément de courant.* — Prenons pour origine des coordonnées (*fig.* 4) l'extrémité a du courant élé-

Fig. 4.



mentaire $ab = ds$, par laquelle arrive le courant, et pour axe des z la direction de ab. Nous rappellerons que l'action résultante exercée par le courant fermé sur ab est située dans le plan xay.

La composante suivant ax de l'action exercée par un élément $a'b'$ de ce courant sur ds est, d'après le numéro précédent,

$$\frac{ii'\,ds}{2\cos\alpha}\cos\widehat{a'ax}\, d\,\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

En intégrant par parties il vient, pour la projection sur ax, de la résultante cherchée,

$$\frac{ii'\,ds}{2}\left(\cos\alpha\cos\widehat{a'ax} - \int\frac{\cos^2\alpha}{r}\, d\,\frac{\cos\widehat{a'ax}}{\cos\alpha}\right)$$

ou simplement

$$(i) \qquad \ddot{u}'\,\frac{ds}{2}\int \frac{\cos^2\alpha}{r}\,d\frac{\cos a'ax}{\cos\alpha},$$

puisque le courant est fermé.

Soient φ l'angle formé par aa' avec sa projection aa'_1 sur le plan xaz; ψ l'angle a'_1ax. Les angles trièdres rectangles déterminés par az, aa', aa'_1 et par aa'_1, aa', ax donnent

$$\cos\alpha = \cos\varphi\sin\psi,$$

$$\cos a'ax = \cos\varphi\cos\psi,$$

et l'expression (i) se réduit à la suivante,

$$(3) \qquad \ddot{u}'\,ds\,A'_y,$$

en posant

$$(4) \qquad \int \frac{1}{2}\,\frac{r^2\cos^2\varphi\,d\psi}{r^3} = A'_y.$$

Cette intégrale représente la somme des aires élémentaires du cône déterminé par le sommet a et par le courant fermé, projetées sur le plan zax et divisées par r^3.

Si l'on porte à partir du point a, sur la perpendiculaire élevée en ce point à l'aire élémentaire $aa'b'$, une longueur proportionnelle à cette aire divisée par le cube de la distance r, et si A' désigne la somme géométrique de toutes les longueurs semblables, A'_y ne sera autre chose que la projection de A' sur ay.

En désignant par A'_x la projection de A' sur ax, on trouve, de la même manière que ci-dessus, pour la composante de l'action cherchée suivant ay,

$$(3') \qquad \ddot{u}_1\,ds\,A'_x$$

On voit, d'après ce qui précède, que le problème proposé se ramène

à déterminer A' en grandeur et en direction, en choisissant convenablement trois axes rectangulaires (qui différeront généralement des précédents), de manière à ramener les calculs à leur plus grande simplicité.

9. *Action sur un élément de courant d'un courant circulaire dont le rayon est très petit par rapport à la distance du centre à l'élément considéré.*

Le problème dont il s'agit se réduit, ainsi que nous venons de le dire, à déterminer les projections de A' sur trois axes rectangulaires passant par l'extrémité a de l'élément ds.

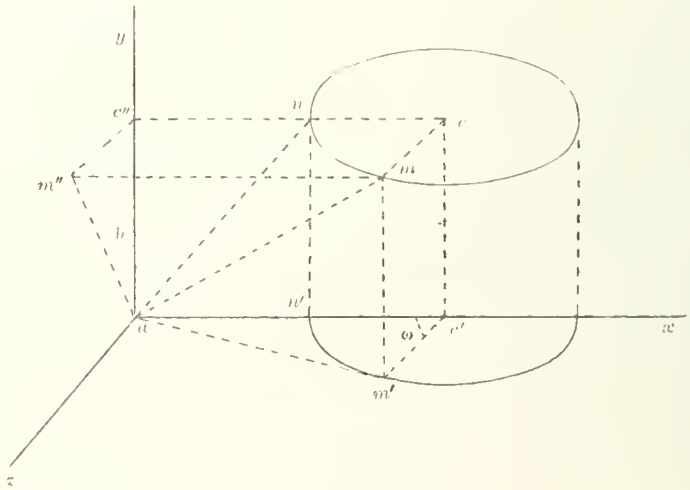
Nous prendrons le plan xaz parallèle à celui du courant circulaire, et nous ferons passer le plan yax par le centre c de la circonférence. Il est évident que l'on a

$$A'_z = 0.$$

Soient

c', m' les projections sur le plan xaz de c et d'un point quelconque m de la circonférence ;

Fig. 5.



c'', m'' les projections de c et m sur le plan yaz ;
n l'intersection de cc'' avec la circonférence, et n' sa projection sur ax ;

ω l'angle $ncm = n'c'm'$;
h la hauteur cc';
ρ' le rayon de la circonférence;
l la distance ac';
$u = \sqrt{l^2 + h^2}$ la distance ac.

Nous admettrons que le courant circulaire aille de la droite vers la gauche, sens qui sera aussi pour nous celui des aires en projection sur les plans coordonnés, comme au numéro précédent.

Nous avons

$$(j) \qquad A_y = -\int \overline{am}^3\, d\,\text{aire}\, an'm', \quad A_x = \int \overline{am}^3\, d\,\text{aire}\, am''c''.$$

Or

$$\text{aire}\, an'm' = \text{aire}\, am'c' - \text{aire}\, n'm'c' = \frac{\rho'}{2}\, l \sin\omega - \rho'\omega,$$

$$\text{aire}\, am''c'' = h\,\frac{m''c''}{2} = h\rho'\,\frac{\sin\omega}{2},$$

d'où

$$(k) \qquad \begin{cases} d.\,\text{aire}\, an'm' = \dfrac{\rho'}{2}\,(l\cos\omega - \rho')\,d\omega, \\ d.\,\text{aire}\, am''c'' = \dfrac{\rho' h}{2}\cos\omega\, d\omega. \end{cases}$$

Nous avons en outre, en négligeant les puissances de $\frac{\rho'}{h}$, $\frac{\rho'}{u}$ supérieures à la première,

$$(l) \qquad \begin{cases} \overline{am}^3 = (\overline{am}^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}} = (\rho'^2 + l^2 + h^2 - 2l\rho'\cos\omega)^{-\frac{3}{2}} \\ \qquad = (\rho'^2 + u^2 - 2l\rho'\cos\omega)^{-\frac{3}{2}} = u^{-3}\left(1 + \dfrac{3l\rho'}{u^2}\cos\omega\right). \end{cases}$$

En faisant les substitutions (k) et (l) dans les formules (j), puis intégrant entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, en remarquant que $l^2 = u^2 - h^2$, on trouve

$$(5) \qquad \begin{cases} A'_y = -\dfrac{\pi\rho'^2}{u^3}\left(\dfrac{3}{2}\,\dfrac{l^2}{u^2} - 1\right) = -\dfrac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(1 - \dfrac{3h^2}{u^2}\right), \\ A'_x = \dfrac{3}{2}\pi\rho'^2\,\dfrac{lh}{u^5}. \end{cases}$$

Soient A_v la projection de A' sur une droite quelconque av ; γ, δ les angles que forme cette droite avec ax et ay. Nous avons

$$A_v = A'_x \cos\gamma + A'_y \cos\delta = \frac{\pi\rho^2}{2a^3}\left(\cos\delta - \frac{3h(l\cos\gamma + h\cos\delta)}{a^2}\right),$$

ou, en désignant par p la distance du centre c au plan mené en a normalement à av,

$$(6) \qquad A_v = \frac{\pi\rho^2}{2a^3}\left(\cos\delta - \frac{3ph}{a^2}\right),$$

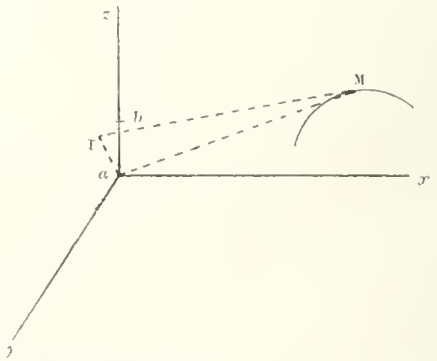
formule dans laquelle il ne faut pas perdre de vue que δ est l'angle que forme ac avec l'axe du courant circulaire.

10. *Action d'un solénoïde sur un élément de courant.* — Nous rappellerons qu'un solénoïde peut être considéré comme étant un système de courants circulaires identiques d'un très petit rayon, très peu espacés, normaux à une courbe directrice, quelle qu'elle soit d'ailleurs, et qui est le lieu de leurs centres.

Soient (*fig.* 6).

x, y, z les coordonnées d'un point u de la courbe directrice rapportée

Fig. 6.



à trois axes rectangulaires ayant a pour origine, l'axe az étant, comme au n° **8**, dirigé suivant ab ;

$d\sigma$ l'arc élémentaire de cette courbe ;

aT la perpendiculaire abaissée de l'origine a sur la tangente MT en M.

Considérons le courant circulaire dont le centre est M.

Si nous faisons coïncider l'axe ay du numéro précédent avec ay, nous aurons

$$\cos\delta = \frac{dy}{d\sigma}, \quad p = y, \quad h = u\cos\widehat{\mathrm{TMO}} = u\frac{du}{d\sigma},$$

et par suite

$$X'_y = \frac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(\frac{dy}{d\sigma} - \frac{3y}{u^2}\frac{du}{d\sigma}\right) = \frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\left(\frac{dy}{u^3} - 3y\frac{du}{u^4}\right),$$

ou encore

$$(m) \qquad X'_y = -\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\, d\,\frac{y}{u^3};$$

on a de même

$$(m') \qquad X'_x = \frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\, d\,\frac{x}{u^3}.$$

D'après le n° **8**, nous aurons ainsi, pour les composantes suivant ax et ay de l'action du courant circulaire considéré,

$$(n) \qquad -ii'\,ds\,\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\, d\,\frac{y}{u^3},$$

$$(n') \qquad ii'\,ds\,\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\, d\,\frac{x}{u^3}.$$

Soient

g' la distance constante de deux courants circulaires consécutifs;
P', P'_1 les extrémités de la courbe directrice ou les *pôles* du solénoïde;
x', y', u' et x'_1, y'_1, u'_1 les valeurs de x, y, u qui se rapportent respectivement à ces deux points. Nous mesurerons σ à partir de P'.

Le nombre des courants circulaires dont les centres sont situés sur σ est $\frac{\sigma}{g}$ et sur $d\sigma$

$$(p) \qquad \frac{d\sigma}{g} \quad [1].$$

---

[1] Cette manière de procéder laisse sans doute à désirer lorsque g' n'est pas infiniment petit; mais, lorsqu'il n'en est pas ainsi, on fera tomber toutes les ob-

Posons

$$\mu' = \frac{i'\pi\rho'^2}{2g'}, \tag{7}$$

constante qui ne dépend que de la nature du solénoïde.

En multipliant par la valeur (p) les expressions (n) et (n'), nous obtiendrons, pour les composantes de l'action exercée sur ds par les courants circulaires correspondant à $d\sigma$,

$$\left\{\begin{aligned} &\mu' i\, d\frac{y}{u^3} \quad \text{suivant } ax, \\ &\mu' i\, d\frac{x}{u^3} \quad \text{suivant } ay. \end{aligned}\right. \tag{q}$$

En intégrant ces expressions entre les limites qui se rapportent aux points P'_1 et P', nous aurons, pour les composantes suivant ax et ay de l'action cherchée,

$$\left\{\begin{aligned} &dX = \mu' i \left(\frac{y'}{u'^3} - \frac{y'_1}{u'^3_1}\right) ds, \\ &dY = \mu' i \left(\frac{x'_1}{u'^3_1} - \frac{x'}{u'^3}\right) ds. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

On voit ainsi que cette action ne dépend que des positions relatives des pôles par rapport à ds, et non de la forme de la courbe directrice. On peut même considérer chacun des pôles comme exerçant sur ds une action spéciale, soit par exemple, pour le pôle P',

$$\left\{\begin{aligned} &dX' = \mu' i \frac{y'}{u'^3} ds, \\ &dY' = -\mu' i \frac{x'}{u'^3} ds. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

---

jections en considérant $d\sigma$, non comme une différentielle, mais comme une longueur assez petite pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la première, et assez grande cependant pour comprendre un certain nombre de courants circulaires.

Comment, d'ailleurs, pourrait-on comprendre qu'un parallélépipède élémentaire pût renfermer une certaine quantité de matière nécessairement discontinue, si l'on admettait que ses dimensions fussent nulles, au lieu de les considérer comme très petites, quoique supérieures aux intervalles intermoléculaires.

On déduit de là

$$\frac{dY}{dX'} = \frac{z'}{y'},$$

ce qui signifie que *chaque pôle exerce sur l'élément de courant une action normale au plan mené par l'élément et le pôle.*

Si nous faisons passer le plan zOy par ab et P′, l'action exercée par le pôle considéré, que nous représenterons par $d\mathrm{R}'$, se réduira à dX', et nous aurons

$$d\mathrm{R}' = \mu' i \frac{y'}{u'^3} ds.$$

Si η désigne l'angle formé par ab avec u', on a

$$y' = u' \sin\eta,$$

et, en supprimant l'accent de u devenu inutile, la formule précédente devient

$$(10) \qquad d\mathrm{R}' = \mu' i \frac{\sin\eta}{u^2} ds,$$

d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

11. *Action d'un courant fermé sur l'un des pôles d'un solénoïde.* —

Soient (*fig.* 7)

P′ le pôle considéré ;
$ab = ds$ un élément du courant fermé ;
b' la projection de b sur $a\mathrm{P}'$;
$d\theta$ l'angle $ab'\mathrm{P}'$.

L'action $d\mathrm{R}$ exercée par ab sur P′, égale et contraire à $d\mathrm{R}'$, est perpendiculaire au plan $ab\mathrm{P}'$ et a pour expression

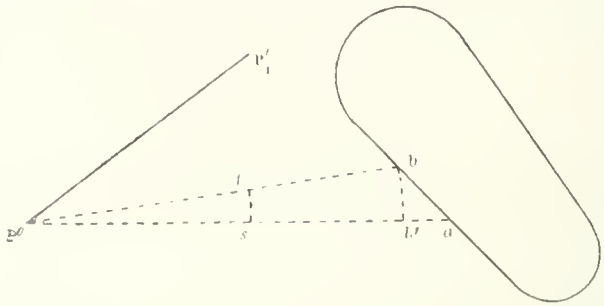
$$(10') \qquad d\mathrm{R} = \mu' i \frac{ab \sin ba\mathrm{P}'}{a\mathrm{P}'^2} = \mu' i \frac{bb'}{a\mathrm{P}'^2},$$

ou, comme $bb' = a\mathrm{P}'.d\theta$,

$$d\mathrm{R} = \mu' i \frac{d\theta}{a\mathrm{P}'}.$$

En transportant cette force parallèlement à elle-même en P′, il en résultera un couple dont l'axe du moment $\mu' i\, d\delta$ ne sera autre chose que l'élément st, limité par aP′, bP′, de l'intersection de la sphère dont le centre est P′ et le rayon $\mu' i$ avec la surface du cône déterminé par le

Fig. 7.



courant fermé et par le sommet P′. Or, tous les axes tels que st des couples élémentaires déterminant une courbe fermée, l'axe du couple résultant est nul. Donc :

L'action d'un courant fermé sur l'un des pôles d'un solénoïde se réduit à une force passant par ce pôle.

L'action du courant n'est donc autre chose que la résultante des forces dR appliquées en ce point.

L'expression (10′) peut se mettre sous la forme suivante, en désignant par da l'aire abc,

$$dR = 2\mu' i \frac{\text{aire}\, abc}{aP'^3} = 2\mu' i \frac{da}{aP'^3}.$$

Soient P′x, P′y, Pz′ trois axes rectangulaires menés par le point P′; da_x, da_y, da_z les projections de l'aire da sur les plans zP′y, xP′z, yP′x. La composante de dR suivant P′x sera

$$dX = 2\mu' i \frac{da_x}{aP'^3},$$

d'où, pour la composante semblable de l'action exercée par le courant,

$$X = 2\mu' i \int \frac{da_x}{aP'^3}.$$

Portons sur la normale au plan $bP'a$, à partir de P', une longueur égale à $\frac{da}{aP'^3}$, et soient A la somme géométrique de toutes les droites ainsi obtenues; A_x, A_y, A_z les projections de cette résultante sur $P'x$, $P'y$, $P'z$; nous aurons évidemment

$$(11)\quad \begin{cases} X = 2\mu' i A_x, \\ \text{et de même} \\ Y = 2\mu' i A_y, \\ Z = 2\mu' i A_z, \end{cases}$$

12. *Action d'un solénoïde sur l'un des pôles d'un autre solénoïde.* — Soient

PP_1 le premier solénoïde;
ρ le rayon des courants circulaires qui le constituent;
g l'équidistance de ces courants;
P' le pôle, du second solénoïde $P'P'_1$, que nous avons à considérer.

Soient, de plus, σ l'arc de la courbe directrice de PP_1 mesuré à partir du point P jusqu'à un point M quelconque dont les coordonnées sont x, y, z.

Il est clair, d'après la signification même de A, que A_x sera donné par la formule (m') du n° **10**, en y remplaçant ρ' par ρ et supposant $u = P'M$. Nous avons donc

$$A_x = \frac{\pi\rho^2}{2\,d\sigma}\, d\frac{x}{u^3}.$$

Portons cette valeur dans la première des formules (11), multiplions-la ensuite par le nombre des courants $\frac{d\sigma}{g}$ compris dans $d\sigma$ pour avoir la composante relative à cet élément, et posons

$$\mu = \frac{i\pi\rho^2}{2g};$$

nous obtiendrons

$$(12)\qquad X = 2\mu\mu' d\frac{x}{u^3}.$$

Soient

x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P;
x_1, y_1, z_1 celles de P_1;
$u_0 = PP'$, $u_1 = P_1P'$;
χ, η, ζ les composantes de l'action totale exercée par PP_1 sur P', estimées suivant $P'x$, $P'y$, $P'z$.

Nous aurons, en intégrant l'équation (12),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \chi &= 2\mu\mu'\left(\frac{x_1}{u_1^3} - \frac{x_0}{u_0^3}\right), \\ &\text{et de même} \\ \eta &= 2\mu\mu'\left(\frac{y_1}{u_1^3} - \frac{y_0}{u_0^3}\right), \\ \zeta &= 2\mu\mu'\left(\frac{z_1}{u_1^3} - \frac{z_0}{u_0^3}\right). \end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que P, P_1 exercent sur P' deux actions distinctes $\frac{2\mu\mu'}{u_0^2}$, $\frac{2\mu\mu'}{u_1^2}$, variant en raison inverse du carré de la distance, dirigées respectivement suivant PP', P_1P', et que si la première, par exemple, est une attraction, l'autre sera une répulsion. Mais, P' exerçant par suite une attraction sur P, P'_1 exercera sur ce pôle une répulsion et une attraction sur P_1.

Il y a donc, en résumé, quatre forces en jeu sur lesquelles il nous paraît inutile d'insister; qu'il nous suffise de rappeler que, en définitive, deux solénoïdes placés à une distance suffisamment grande l'un de l'autre par rapport à leurs diamètres se comportent entre eux comme deux aimants.

Tel est l'exposé succinct de la partie essentielle de la théorie d'Ampère. Nous avons omis à dessein les questions relatives aux actions mutuelles et au mouvement de deux courants rectilignes situés ou non dans un même plan, parallèles ou non, d'un courant circulaire sur son diamètre, etc., questions dont les solutions sont trop simples pour que nous ayons cru devoir nous en occuper.

Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles, et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

§ I. — *Démonstration de la série trigonométrique principale.*

1. Soit $f(x)$ une fonction finie et périodique de x pouvant, dans l'intervalle d'une période $2a$, de $x = -a$ à $x = +a$ par exemple, recevoir des valeurs quelconques et présenter même un nombre fini de discontinuités : toutefois, dans ce dernier cas, on convient, pour que la fonction $f(x)$ ne cesse pas d'être déterminée, de lui attribuer une valeur égale à la moyenne arithmétique de sa valeur précédente et de la suivante, moyenne représentée par $\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2}$, où ε désigne un infiniment petit positif. Il est naturel de chercher à exprimer cette fonction $f(x)$ au moyen des fonctions les plus simples qui admettent la même période $2a$, c'est-à-dire au moyen des fonctions $A_i \cos\frac{i\pi x}{a} + B_i \sin\frac{i\pi x}{a}$, i désignant un entier quelconque (qu'on peut supposer positif), et A_i, B_i deux coefficients constants. Proposons-nous donc de développer $f(x)$ en une série de la forme

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \left(A_i \cos\frac{i\pi x}{a} + B_i \sin\frac{i\pi x}{a}\right).$$

A cet effet, nous admettrons d'abord que le développement soit possible, ou que la fonction $f(x)$ égale bien la somme limite d'une série convergente ordonnée suivant les cosinus et sinus des multiples de $\frac{\pi x}{a}$, et nous déterminerons, dans cette hypothèse, les coefficients A_i, B_i. Puis, une fois que nous connaîtrons la forme précise de la série, nous démontrerons qu'elle convient pour toute fonction périodique $f(x)$.

Le calcul de A_i, B_i se fait par la méthode de Fourier (ou d'Euler), bien connue. On multiplie l'équation (1) par $\cos\frac{i\pi x}{a}dx$ ou par $\sin\frac{i\pi x}{a}dx$, et l'on intègre les deux membres dans toute l'étendue d'une période, de $x=-a$ à $x=+a$, en observant que le second membre de (1) peut être traité comme une somme d'un nombre fini de termes, vu que l'erreur commise sur ce second membre, en l'arrêtant à un terme assez éloigné, est aussi petite qu'on veut et ne donnera, dans le résultat des intégrations, qu'un terme complémentaire inférieur, lui aussi, à toute erreur donnée. D'ailleurs, les produits du terme quelconque

$$A_j\cos\frac{j\pi x}{a}+B_j\sin\frac{j\pi x}{a}$$

du second membre de (1) par $\cos\frac{i\pi x}{a}$ et par $\sin\frac{i\pi x}{a}$ sont, respectivement,

$$\frac{1}{2}A_j\left[\cos\frac{(i+j)\pi x}{a}+\cos\frac{(i-j)\pi x}{a}\right]+\frac{1}{2}B_j\left[\sin\frac{(i+j)\pi x}{a}-\sin\frac{(i-j)\pi x}{a}\right],$$
$$\frac{1}{2}A_j\left[\sin\frac{(i+j)\pi x}{a}+\sin\frac{(i-j)\pi x}{a}\right]+\frac{1}{2}B_j\left[\cos\frac{(i-j)\pi x}{a}-\cos\frac{(i+j)\pi x}{a}\right],$$

et se composent de termes proportionnels soit à des sinus qui ont leurs valeurs moyennes nulles, soit à des cosinus nuls aussi en moyenne, si ce n'est quand ils se réduisent à l'unité ou qu'on a $i\pm j=0$, c'est-à-dire ou $i=j=0$, ou du moins $j=i$. Or il est évident que tous ces termes, multipliés par dx et intégrés dans l'intervalle $2a$, qui comprend une ou plusieurs de leurs périodes, donnent pour résultats les produits de $2a$ par leurs valeurs moyennes. Il vient donc simplement :

1° Pour les valeurs de i qui diffèrent de zéro,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{i\pi x}{a}\,dx = a\,A_i, \quad \int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx = a\,B_i;$$

2° Pour $i = 0$ $\left(\text{ce qui annule le terme } A_i \sin\frac{i\pi x}{a}\right)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2a\,A_0.$$

Afin d'éviter plus tard toute confusion, appelons ξ, dans ces formules, la variable d'intégration, et posons, en conséquence,

$$(2)\qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\,d\xi, \\[2ex] A_i = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\dfrac{i\pi\xi}{a}\,d\xi, \\[2ex] B_i = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\,d\xi. \end{cases}$$

La relation (1) deviendra celle qu'on se proposait d'établir :

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\,d\xi \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\cos\frac{i\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi + \sin\frac{i\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi\right]. \end{cases}$$

2. On peut, dans cette formule (3), en n'y faisant varier d'abord, au second membre, i que depuis 1 jusqu'à un entier très grand n, transporter les facteurs $\cos\frac{i\pi x}{a}$, $\sin\frac{i\pi x}{a}$ sous les signes d'intégration $\int_{-a}^{a}$ et réduire ensuite une somme d'intégrales à l'intégrale d'une somme. La formule (3) revient donc à poser

$$(4)\quad f(x) = \lim \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{i=n}\cos\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\right]d\xi \quad (\text{pour } n \text{ infini}).$$

Mais il est possible de simplifier encore celle-ci, au moyen de la formule qui donne la somme des cosinus des multiples successifs d'un arc quelconque α, et qui se déduit de la relation

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos i\alpha = \sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\alpha,$$

en y faisant successivement $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, puis ajoutant tous les résultats. Il vient ainsi

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{i=1}^{i=n}\cos i\alpha = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2},$$

ou bien

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{i=n}\cos i\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

La formule (4) équivaut donc encore à celle-ci :

$$(5)\quad f(x) = \lim\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{2\sin\frac{\pi(x-\xi)}{2a}}\sin\frac{(2n+1)\pi(x-\xi)}{2a}\,d\xi \quad (\text{pour } n \text{ infini}).$$

Changeant enfin de variable d'intégration, posons

$$x-\xi = u \quad \text{ou} \quad \xi = x-u, \quad d\xi = -du,$$

et il vient

$$(6)\quad f(x) = \lim\frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a}\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\,du \quad (\text{pour } n \text{ infini}).$$

5. Démontrons maintenant que ces formules (3), (4), (5), (6) conviennent, quelle que soit la fonction périodique $f(x)$. Il suffit, pour cela, de faire voir que le second membre de (6), ou plutôt l'expression

$$(7)\qquad \frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a}\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\,du,$$

s'approche indéfiniment de $f(x)$ quand n y grandit sans limite. Consi-

dérons donc cette expression où, pour fixer les idées, nous supposerons x compris entre $-a$ et $+a$. Sans la présence, sous le signe $\int$, du facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$, elle égalerait l'aire comprise entre un axe des abscisses u et les $2n+1$ arceaux que présenterait, de $u=x-a$ à $u=x+a$, la sinusoïde ayant pour ordonnée $\frac{1}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}$. L'aire partielle limitée par chaque arceau est, en valeur absolue, comparable au produit de la très petite base $\frac{2a}{2n+1}$ de l'arceau par l'ordonnée maximum $\frac{1}{a}$; en sorte que la somme de toutes ces aires serait finie, comparable à 2, si on les prenait en valeur absolue. Mais, comme deux arceaux consécutifs ont leurs ordonnées égales chacune à chacune, également espacées et de signes contraires, ces aires, en très grand nombre, s'entre-détruisent deux à deux et ont leur somme algébrique incomparablement plus faible que leur somme absolue, c'est-à-dire infiniment petite à la limite $n=\infty$. Voyons actuellement en quoi le facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ modifie le résultat. Ce facteur, où $f(x-u)$ est toujours fini, ne peut devenir infini que pour $u=0$, car l'arc $\frac{\pi u}{2a}$ ne varie que de $\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-1\right)$ à $\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+1\right)$, c'est-à-dire dans une partie de l'intervalle compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (puisque x est supposé moindre que a en valeur absolue).

Faisons d'abord abstraction des valeurs de u qui sont très voisines de zéro. Pour toutes les autres, le facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ reste fini, et il varie graduellement dans des intervalles qui comprennent un grand nombre d'arceaux de la sinusoïde. Les produits des ordonnées de celle-ci par $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ y sont donc finis et sensiblement les mêmes (en valeur absolue) pour deux arceaux consécutifs, de sorte que les aires de ces arceaux continuent à s'entre-détruire sensiblement et leur somme algébrique à

être incomparablement moindre que leur somme arithmétique, c'est-à-dire nulle à la limite.

Quant aux éléments de l'intégrale (7), pour lesquels u est très petit et compris, par exemple, entre deux limites fort rapprochées $\pm\mu$, le facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ s'y réduit sensiblement à

$$\frac{a}{\pi u} f(x-u),$$

ou, si ε désigne un infiniment petit positif, à $\frac{a}{\pi u} f(x+\varepsilon)$ pour les valeurs négatives de u, à $\frac{a}{\pi u} f(x-\varepsilon)$ pour les valeurs positives de u. Ces éléments valent donc, en tout,

$$\frac{f(x+\varepsilon)}{\pi}\int_{-\mu}^{0}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}+\frac{f(x-\varepsilon)}{\pi}\int_{0}^{\mu}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u},$$

ou bien, vu que la fonction multipliant du sous les signes $\int$ est paire et que $f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)$ égale toujours $2f(x)$,

$$(8)\qquad \frac{2f(x)}{\pi}\int_{0}^{\mu}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}.$$

Mais, quand n devient très grand, on peut remplacer la limite supérieure μ par ∞. En effet, on n'ajoute ainsi à l'intégrale (8) que des aires d'arceaux de sinusoïde analogues à ceux dont il vient d'être parlé, aires très petites et alternativement positives et négatives, qui seront ici lentement décroissantes d'un arceau au suivant, à cause du dénominateur u de plus en plus considérable, et dont, par conséquent, la somme, moindre que la première d'entre elles, sera négligeable.

La valeur limite de l'expression (8) est donc la même que celle de

$$(9)\qquad \frac{2f(x)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}.$$

Or on sait que l'intégrale $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ku}{u}du$, où k est une constante posi-

tive quelconque, peut s'écrire $\int_0^\infty \frac{\sin ku}{ku} d(ku) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, et qu'elle a pour valeur $\frac{\pi}{2}$. Donc l'expression (9), limite de (7), n'est autre que $f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — *Formules dérivées.*

4. La formule (3) en comprend quatre autres, qui sont souvent utiles. Les deux premières s'obtiennent en concevant que la fonction $f(x)$ soit ou impaire ou paire, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$f(-x) = \mp f(x),$$

ce qui n'empêche pas de lui attribuer des valeurs quelconques entre les limites $x = 0$ et $x = a$.

Si $f(-x) = -f(x)$, les expressions (2) de A_0 et de A_i sont nulles, vu que sous les signes $\int$ les éléments correspondant à deux valeurs égales et contraires de ξ se détruisent. Quant aux éléments analogues de l'expression de B_i, ils sont égaux et s'ajoutent. Il vient donc

$$(10) \qquad f(x) = \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{a} \int_0^a f(\xi) \sin\frac{i\pi\xi}{a} d\xi.$$

Si, au contraire, $f(-x) = f(x)$, c'est l'expression (2) de B_i qui s'annule, et ce sont celles de A_0 et A_i qu'on peut ne prendre qu'entre les limites 0 et a, sauf à doubler les résultats. On trouve

$$(11) \qquad f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f(\xi)\, d\xi + \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty} \cos\frac{i\pi x}{a} \int_0^a f(\xi) \cos\frac{i\pi\xi}{a} d\xi.$$

Les deux dernières formules cherchées se déduisent de (10) et (11), en supposant que la fonction $f(x)$ reçoive, à égale distance des deux limites zéro et a, des valeurs égales et de même signe dans la formule (10), égales et de signes contraires dans la formule (11), c'est-à-dire en posant respectivement $f(a-x) = \pm f(x)$. Alors, aux seconds

membres de (10) et (11), les termes pour lesquels i est pair s'annulent, vu que les éléments respectifs d'intégrale $f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}d\xi$, $f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}d\xi$, qui correspondent à deux valeurs de ξ également distantes de zéro et a se détruisent. Au contraire, ces deux éléments s'ajouteraient et seraient égaux pour i impair. Si, afin d'abréger, l'on appelle b la moitié de a, la fonction $f(x)$, complètement arbitraire depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{a}{2}=b$, comportera ainsi, entre ces limites, les deux expressions

$$(12)\qquad f(x)=\frac{2}{b}\sum_{i=0}^{i=\infty}\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2b}\int_0^b f(\xi)\sin\frac{(2i+1)\pi\xi}{2b}d\xi,$$

$$(13)\qquad f(x)=\frac{2}{b}\sum_{i=0}^{i=\infty}\cos\frac{(2i+1)\pi x}{2b}\int_0^b f(\xi)\cos\frac{(2i+1)\pi\xi}{2b}d\xi.$$

On passerait d'ailleurs de l'une de ces formules à l'autre par les changements de x en $b-x$ et de $f(b-x)$ en $f(x)$.

5. Enfin, la relation (4) conduit à la formule classique de Fourier, en y faisant grandir indéfiniment la période $2a$, ce qui revient à supposer la fonction $f(x)$ donnée arbitrairement de $x=-\infty$ à $x=+\infty$. Alors, quand on passe d'un terme de la série Σ au terme suivant, l'expression $\frac{i\pi}{a}$, qu'on peut appeler α, croît de la très petite quantité $\Delta\alpha=\frac{\pi}{a}$, qui devient, à la limite, une différentielle $d\alpha$; en sorte qu'il semble permis de remplacer, dans (4), le facteur $\frac{1}{a}$ par $\frac{d\alpha}{\pi}$, puis de faire passer $d\alpha$ sous le signe Σ et de transformer la somme Σ en une intégrale prise de $\alpha=0$ à $\alpha=\frac{n\pi}{a}$. Il vient donc

$$(14)\qquad f(x)=\lim\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,d\xi\int_0^{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha\quad(\text{pour } \alpha \text{ infini}),$$

ou bien,

$$(15)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi.$$

Arrêtons-nous un instant à cette relation, qui, toute importante qu'elle soit dans bien des cas, n'a plus la même netteté que la formule (4), par suite de l'hypothèse $a = \infty$. Effectuons, dans le second membre de (14), l'intégration par rapport à α, en n'y supposant pas encore infinie la limite supérieure α. Ce second membre devient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

ou bien, si nous posons $x - \xi = u$ comme aux n^{os} **2** et **5**,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-u)}{u}\sin\alpha u\,du. \tag{16}$$

Le nombre α étant très grand, on peut appliquer à cette expression (16) la discussion faite au n° **5** sur l'expression (7), à cela près qu'ici le facteur $\frac{f(x-u)}{\pi u}$ remplace le facteur plus complexe $\frac{f(x-u)}{2a\sin\frac{\pi u}{2a}}$. On reconnaît de la sorte que les éléments de l'intégrale correspondant aux très petites valeurs absolues de u rendent à eux seuls, pour α infini, l'expression (16) égale à $f(x)$. Comme d'ailleurs, d'après ce qu'on a vu au n° **5**, les autres éléments de la même intégrale qui correspondent à des valeurs de u comprises dans tout intervalle fini ne donnent qu'un total nul à la limite, il faudra et il suffira, pour que la formule (14) soit applicable, que les éléments de l'intégrale (16) correspondant aux très grandes valeurs absolues de u soient eux-mêmes négligeables. C'est ce qui arrivera, par exemple, si la fonction $f(x-u)$ est continue pour les très grandes valeurs absolues de sa variable, et si, à mesure que u y tend vers $\pm\infty$, elle décroît, ou du moins grandit assez peu pour que l'expression $\frac{f(x-u)}{u}$ s'approche de plus en plus de zéro. Alors, en effet, les éléments considérés de l'intégrale (16) se trouvent groupés de manière à représenter des aires alternativement positives et négatives, toutes fort petites et qui décroissent quand on passe de l'une à l'autre, à mesure que u tend soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$. La somme algébrique de ces aires est donc moindre que

la première d'entre elles, laquelle s'annule pour α infini, et la formule (14) est bien exacte.

Mais il importe d'observer que la série ainsi exprimée par (14) ou (16) peut devoir en partie sa convergence, sa valeur finie et déterminée, à l'ordre dans lequel se succèdent ses éléments, et non toujours à leur seule petitesse absolue; de sorte qu'il faudra ne la transformer qu'avec de minutieuses précautions et en vérifiant, dans chaque cas, si l'on n'altère pas sa valeur. Même le passage de la formule (14) à la formule (15) donne matière à discussion, soit à cause du mode de groupement des éléments, qui n'est plus le même, soit parce que la variable $x - \xi = u$ devient alors infinie avant qu'on effectue l'intégration par rapport à α $\Big|$ et non après, circonstance qui avait, dans (16), réduit à πu le dénominateur plus complexe $2u \sin \frac{\pi u}{2u}\Big]$. Il en serait autrement, et l'ordre des intégrations deviendrait arbitraire, si la fonction $f(x)$ s'annulait identiquement en dehors de deux limites données $x = p$, $x = q$; car, alors, dans le second membre de (14), où α est supposé très grand mais non encore infini, l'intégration par rapport à ξ pourrait ne se faire que de $\xi = p$ à $\xi = q$, et ce second membre serait une intégrale double ordinaire, ayant sa fonction sous les signes $\int$ finie et ses limites, également finies, bien déterminées.

§ III. — *Sur une raison générale, propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en Physique mathématique.*

6. Ce qui précède est une théorie purement analytique du développement d'une fonction arbitraire (donnée dans un certain intervalle) en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples naturels ou impairs d'un arc proportionnel à la variable. Mais on sait que les géomètres ont été conduits à l'étude de ces séries par des problèmes de Physique, savoir, ceux où, le temps t, par exemple, étant la variable indépendante principale, x une autre variable, caractéristique des différentes parties d'un corps, u la fonction inconnue de x et t qui représente un état physique considéré (température, déplacement vibra-

toire, etc.), et enfin $f(x)$ la fonction arbitraire de x qui exprime les valeurs initiales de u, la nature des équations du problème montre qu'avec un état initial de la forme $A\cos mx + B\sin mx$, et certaines valeurs de m, la fonction cherchée u se réduit à ce qu'on appelle une *solution simple*, c'est-à-dire à une expression, relativement facile à obtenir, ne dépendant de t que par un facteur, le même pour tout le corps; de sorte que, vu d'ailleurs la forme linéaire des équations et la possibilité de superposer simplement les effets d'un nombre quelconque d'états initiaux, il ne s'agit plus, pour avoir l'expression générale de u, que de décomposer $f(x)$ en termes de cette forme

$$A\cos mx + B\sin mx.$$

Dans les cas où les valeurs de m sont multiples de l'une d'elles, un tel mode de décomposition peut toujours se faire, d'après les démonstrations directes données aux paragraphes précédents. Mais, dès que certaines conditions, dites *définies*, relatives aux limites entre lesquelles varie x, se compliquent un peu, les valeurs de m cessent d'être les multiples de l'une d'elles, même quand les intégrales simples correspondent encore à un état initial exprimable par un sinus ou un cosinus. De plus, ce dernier cas est lui-même très exceptionnel. Il continue bien à y avoir, toujours, une infinité de solutions *simples* ne dépendant de t que par un facteur où les autres variables x, y, z n'entrent pas, et où t se trouve affecté d'un coefficient k d'autant plus grand que la solution simple varie plus vite en fonction de t, x, y, z; mais il faut recourir, pour représenter les états initiaux correspondants, qu'on peut appeler aussi des *états initiaux simples*, à des expressions plus compliquées que des cosinus ou des sinus. Or, dans ces divers cas, on tâche encore de former l'intégrale générale par voie d'addition, en dédoublant ou décomposant l'état initial arbitraire donné en états initiaux simples, pris dans l'ordre des valeurs croissantes de k, c'est-à-dire rangés suivant la rapidité relative avec laquelle ils varient d'un point à l'autre, les plus lents à changer étant les premiers; et l'on sait que le procédé de Fourier, pour la détermination des coefficients ou amplitudes des états initiaux simples, ne cesse pas d'être applicable, du moins dans la théorie de la chaleur et dans celle des petites vibrations ou oscillations.

Il ne reste ainsi de doute que sur la question même de savoir si cette sorte complexe de dédoublement de l'état initial est toujours possible. Malheureusement, une sommation générale et directe des séries qui l'expriment n'a pu encore être effectuée. Il y a donc lieu de chercher, à défaut d'une démonstration analytique, quelque aperçu synthétique, ou, pour ainsi dire, quelque raison de bon sens, propre à justifier ces modes indispensables de développement et à expliquer la convergence qu'on leur a effectivement reconnue quand on en a tenté le calcul numérique.

7. La raison naturelle désirée se trouve dans le double fait qui constitue le caractère commun de toutes les questions de Physique mathématique étudiées jusqu'à présent et sans lequel on ne pourrait pas les traiter par des équations aux dérivées partielles, à savoir, d'une part, dans le nombre immense des points matériels composant toute particule perceptible de matière, et, d'autre part, dans la graduelle variation de l'état physique *moyen local* quand on passe d'une particule à une autre, variation supposée toujours assez peu brusque pour que, même dans les cas où elle est le plus rapide, des milliards de points matériels présentent sensiblement le même état. C'est cette variation très graduelle qui permet de ne tenir aucun compte individuel des molécules en présence, mais d'exprimer simplement, pour chaque petite région, au moyen de dérivées partielles en x, y, z, 1° les différences d'état existant dans le corps suivant les divers sens, 2° les actions mutuelles, fonction de ces différences, exercées entre particules contiguës, et 3° les changements qui en résultent d'un instant à l'autre pour l'état moyen local de chaque particule ou élément de volume. Aussi, quand on introduit de la sorte des équations aux dérivées partielles à la place des équations différentielles simultanées, en nombre immense, qu'on aurait si l'on voulait exprimer les états propres de tous les points du corps, renonce-t-on, par le fait même, à comprendre dans cette analyse simplifiée les phénomènes où il se produit des différences sensibles d'état entre molécules voisines, comme doivent être, par exemple, les vibrations calorifiques des corps, ou comme le seraient des mouvements vibratoires d'une longueur d'onde comparable aux distances intermoléculaires. Eh bien! c'est justement la restriction que l'on s'impose ainsi, en se bornant à des états

physiques graduellement variables, qui amène la convergence des développements des intégrales générales en séries de solutions simples rangées dans l'ordre des valeurs croissantes de k.

Représentons-nous, en effet, les équations différentielles simultanées qui régissent tous les petits mouvements possibles, même à courte période, du système, ou tous ses changements assez peu étendus d'état physique. Ces équations étant, comme on sait, linéaires et à coefficients constants dans les problèmes où les fonctions étudiées varient modérément, leurs intégrales se formeraient en superposant des solutions simples, en nombre égal à celui des équations différentielles (supposées ramenées au premier ordre), et dont chacune ne dépend de la variable indépendante t que par un facteur, commun pour tout le système, de la même forme (exponentielle ou trigonométrique) que celui que contiennent les solutions simples des équations corrélatives aux dérivées partielles. D'ailleurs, la grandeur du coefficient k de t, dans ces intégrales simples, est encore en rapport avec la rapidité des changements éprouvés, tant d'un instant à l'autre que d'un point à l'autre, par les états physiques qu'elles représentent.

Cela posé, si l'état initial donné est quelconque, s'il contient, pour les diverses régions du corps, des différences aussi sensibles entre molécules contiguës qu'entre molécules éloignées, il est clair que les solutions simples correspondant aux valeurs les plus élevées de k, et les seules propres à exprimer des changements aussi brusques, figureront dans l'intégrale avec des coefficients non moins grands que ceux des autres solutions simples. Par conséquent, on aura beau ranger les termes suivant l'ordre des grandeurs croissantes de k, on ne remarquera aucune convergence dans les sommes, ou plutôt (vu le nombre prodigieux de leurs termes) dans les *séries* ainsi obtenues. Mais il n'en sera naturellement plus de même si, au contraire, l'état initial donné varie assez peu, d'un endroit à l'autre, pour être à peu près pareil chez des milliards de points voisins, même là où ses changements sembleraient fort rapides au physicien. Alors, les termes où k est très grand, et qui expriment des états bien différents pour deux molécules contiguës, n'auront visiblement à intervenir que dans une proportion tout à fait insignifiante; en sorte que, d'une part, ces termes, dont le calcul serait d'ailleurs illusoire par les équations aux dérivées partielles que l'on

substitue, à la limite, aux équations différentielles vraies du problème, s'évanouiront d'eux-mêmes, et que, d'un autre côté, les sommes exprimant les fonctions à évaluer convergeront, à partir de certaines valeurs de k, lesquelles, étant finies, seront encore très calculables, ainsi que les solutions simples où elles entrent, par les équations aux dérivées partielles.

Donc, la même circonstance qui permet de remplacer les équations différentielles simultanées du problème, dont le nombre est immense (et supposé même infini à la limite), par une ou par quelques équations aux dérivées partielles, et qui permet d'exprimer l'état initial au moyen de fonctions ne présentant, dans toute étendue perceptible, qu'un nombre restreint (et non des milliards) d'oscillations, permet aussi de compter sur la convergence des développements que donne la décomposition de cet état initial en états initiaux simples, rangés suivant l'ordre croissant de la rapidité de leurs variations.

LE DÉVIOSCOPE

Appareil donnant directement le rapport qui existe entre la vitesse angulaire de la Terre et celle d'un horizon quelconque autour de la verticale du lieu;

PAR M. G. SIRE.

Foucault a formulé le premier que la rotation apparente du plan d'oscillation du pendule est proportionnelle au sinus de la latitude, autrement dit que le déplacement angulaire du plan d'oscillation est égal au mouvement angulaire de la Terre dans le même temps, multiplié par le sinus de la latitude du lieu d'observation. Dans notre hémisphère, ce déplacement a lieu vers la gauche de l'observateur qui regarde le pendule; il a lieu vers la droite dans l'hémisphère austral.

On sait que Foucault est arrivé à la découverte de cette loi du sinus de la latitude à l'aide d'une ingénieuse hypothèse qui consiste à admettre que, « quand la verticale, toujours comprise dans le plan d'oscillation, change de direction dans l'espace, les positions successives du plan d'oscillation sont déterminées par la condition de faire entre elles des angles minima; autrement dit et en langue vulgaire, lorsque la verticale sort du plan d'impulsion primitive, le plan d'oscillation la suit en restant aussi parallèle que possible ».

L'exactitude de cette loi a été confirmée partout où la célèbre expérience de Foucault a été répétée, mais nulle part elle n'a reçu une consécration plus éclatante que dans la gigantesque expérience exécutée au Panthéon en 1851.

Toutefois, la vérification de la loi de Foucault à l'aide du pendule

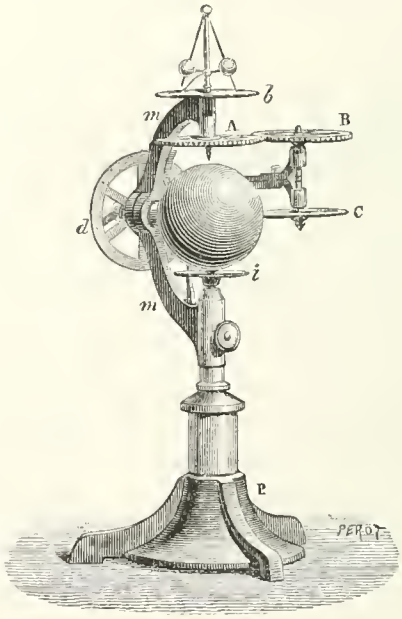
exige de nombreuses expériences faites à des latitudes différentes. L'impossibilité, le plus souvent, de faire l'expérience dans un cours a déterminé quelques savants à imaginer des instruments qui puissent indiquer artificiellement sur place ce qui, en réalité, se produit aux diverses latitudes. Je citerai notamment Wheatstone et de Silvestre [1].

J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences [2] un appareil qui me paraît plus complet que ses devanciers. Il permet de vérifier très simplement la loi en question, en ce que la disposition adoptée est une réalisation mécanique fidèle de l'hypothèse de Foucault.

Cet appareil est représenté dans trois positions différentes dans les *fig.* 1, 2 et 3 ci-dessous; ces positions correspondent à l'expérience du pendule exécutée au pôle, à l'équateur et à une latitude moyenne.

Il se compose (*fig.* 1) d'un trépied de fonte P, surmonté d'un axe

Fig. 1.



d'acier qui supporte une sphère de métal ou de bois dur. Dans les ex-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXIII, p. 40.

(2) *Ibid.*, t. XCII, p. 995, séance du 25 avril 1881.

périences, cette sphère reste fixe. Une armature cintrée *mm* sert de support à un petit système d'engrenages composé des trois roues A, B, C. La sphère et ces trois roues ont rigoureusement le même diamètre.

La roue A est fixée à un axe d'acier, sur le prolongement duquel est figuré le plan d'oscillation d'un pendule fictif, par deux petites boules de laiton. C'est ce petit pendule que l'on peut établir aux diverses latitudes de la sphère, en déplaçant le système d'engrenages au moyen d'un mouvement de charnière existant sur le milieu de l'armature cintrée, et dont l'axe prolongé par la pensée aboutit au centre de la sphère. Sur la partie supérieure de l'armature existe un index qui se meut sur le cercle divisé *d*, ce qui permet de placer exactement le pendule fictif à une latitude quelconque. De cette façon, la verticale du pendule se déplace à volonté suivant un même méridien de la sphère centrale.

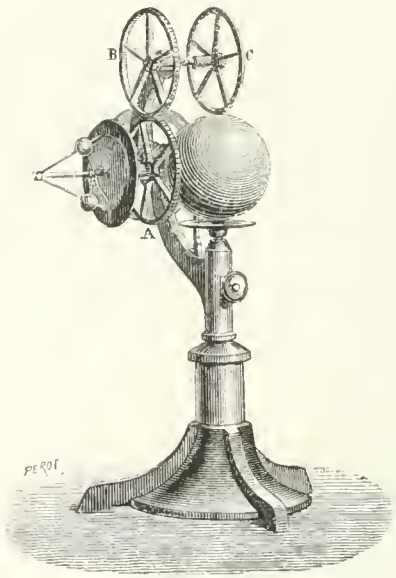
Les roues A et B sont dentées et engrènent ensemble. Quant à la roue C, solidaire avec la roue B, ce n'est en réalité qu'une roulette, au bord tranchant finement denté, destinée à rouler *sans glissement* sur la sphère lorsqu'on fait tourner, dans le sens de la rotation terrestre, l'armature *mm* autour de l'axe vertical de l'instrument. Or il est visible que, dans cette rotation, la roulette C entraîne la roue B, puisque ces deux pièces sont solidaires sur le même axe, toujours parallèle à la verticale du lieu d'observation ; par suite, la roue B imprime à la roue A une vitesse angulaire égale à la sienne, mais de sens contraire. D'autre part, comme l'axe de la roue A, dans la *fig.* 1, est placé sur le prolongement du diamètre vertical de la sphère figurant la ligne des pôles de la Terre, tandis que la roulette C se meut sur l'équateur de cette même sphère, il en résulte que le plan d'oscillation du pendule fictif reste rigoureusement fixe par rapport aux objets environnants.

De cette fixité on déduit aisément, à l'aide d'un cadran divisé *b* figurant un horizon polaire fixé au support tournant et par une aiguille établie dans le plan d'oscillation, que ce plan semble se déplacer en sens contraire de la rotation de ce support. On vérifie de la sorte qu'au pôle le déplacement du plan d'oscillation du pendule est égal au mouvement angulaire de la Terre, mais de sens contraire, et que ce déplacement a lieu vers la gauche de l'observateur qui regarde le pendule.

Pour vérifier ce qui se passe à l'équateur terrestre, on dispose l'appareil comme dans la *fig.* 2. On voit alors que le point de contact de la

roulette C se trouve precisement au pôle de la sphère centrale, et, partant, que le déplacement de tout le système autour de la verticale de l'appareil ne peut produire aucune rotation angulaire de cette roulette autour de son axe, et qu'il en est de même des roues B et A. On dé-

Fig. 2.



montre ainsi que, à l'équateur, le plan d'oscillation du pendule n'éprouve aucun déplacement angulaire autour de la verticale, quel que soit l'azimut de ce plan.

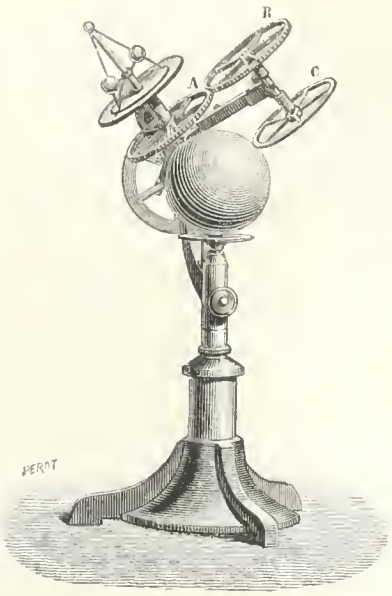
Enfin, si l'on considère le cas de l'expérience du pendule exécutée à une latitude moyenne, l'appareil doit être disposé comme dans la *fig.* 3. Dans ce cas, la roulette C est astreinte à se mouvoir sur un parallèle de la sphère dont la latitude est égale au complément de la latitude du lieu de l'observation. Dès lors cette roulette imprime à la roue A une vitesse angulaire $\omega' = \omega \sin\lambda$, ω étant son déplacement angulaire sur la sphère.

Pour le démontrer, soient

PP′ (*fig.* 4) la ligne des pôles de la sphère ;
EE′ l'équateur ;
λ la latitude du lieu.

En faisant tourner le système de roues autour de la verticale de l'appareil, on voit aisément que les chemins parcourus par le point de

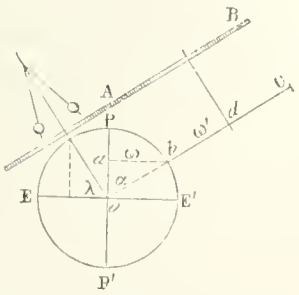
Fig. 3.



contact b sur la circonférence de la roulette C et sur le cercle parallèle de rayon ab sont respectivement

$$\omega' bd \quad \text{et} \quad \omega ab.$$

Fig. 4.



Or ces chemins sont égaux, puisque la roulette C se meut sans glis-

sement sur la sphère; on a donc

$$\omega' = \omega \frac{ab}{bd}. \tag{1}$$

La simple discussion de cette formule élémentaire fait voir que :

1° Quand l'expérience est faite au pôle, comme dans la *fig.* 1, ab devient égal à $oE' = bd$; par suite, $\omega' = \omega$.

2° Dans le cas de l'équateur (*fig.* 2), ab est nul, ω' est aussi nul.

3° Enfin, pour le cas de la *fig.* 3, comme par construction $bd = ob$, la formule (1) devient

$$\omega' = \omega \frac{ab}{ob} = \omega \sin \alpha,$$

ou

$$\omega' = \omega \sin \lambda.$$

C. Q. F. D

Sur les permutations alternées;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Le présent travail a pour point de départ la notion, probablement toute nouvelle, des permutations alternées de n lettres distinctes, et pour objet l'étude du nombre $2A_n$ de ces permutations.

Nous définissons les permutations alternées de n éléments distincts; nous donnons le moyen de calculer, de proche en proche, la moitié A_n de leur nombre; nous déterminons la fonction génératrice de la fraction $\frac{A_n}{n!}$; nous en déduisons les développements de $\operatorname{tang} x$ et de $\operatorname{séc} x$ suivant les puissances croissantes de x; nous appliquons les résultats obtenus à différents développements ou séries; nous en tirons plusieurs conséquences touchant les développements des fonctions elliptiques; enfin nous donnons de nouvelles et plus simples formules pour calculer les nombres A_n.

Il se trouve que ces nombres A_n ne sont autres que les coefficients de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement soit de $\operatorname{tang} x$, soit de $\operatorname{séc} x$. Ces coefficients avaient été considérés déjà. Grâce aux permutations alternées, nous en pouvons donner une définition combinatoire très simple, très nette, et indépendante de tout développement.

I. — *Définition des permutations alternées.*

1. Considérons n éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ et formons-en toutes les permutations. Si, dans l'une quelconque d'entre elles, nous retranchons chaque indice du suivant, nous obtenons une suite de $n-1$ différences, dont aucune n'est égale à zéro, et qui, dans toutes les permutations, sauf deux, sont les unes positives, les autres négatives. Lorsque, tout le long de cette suite, ces différences sont *alternativement* positives et négatives, la permutation correspondante est *alternée*. Lorsque, au contraire, cette continuelle alternance des signes ne se présente pas, la permutation n'est pas alternée.

Par exemple, dans le cas particulier où $n = 4$, les permutations

$$\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_1$$

sont alternées, et les permutations

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4$$

ne le sont pas.

2. Le nombre des permutations alternées de n éléments distincts dépend évidemment, et uniquement, de n. Par sa nature même, il est forcément positif et entier; et l'on peut démontrer, d'une manière très simple, qu'il est toujours pair. Il suffit effectivement de faire observer que les permutations alternées de n éléments distincts se correspondent deux à deux. L'un des moyens les plus commodes d'établir cette correspondance consiste à associer les permutations qui présentent les mêmes indices dans un ordre exactement inverse.

En associant de cette façon les permutations alternées de quatre éléments, lesquelles sont au nombre de dix, on obtient les cinq couples suivants :

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4 & \text{et} & \alpha_4\alpha_2\alpha_3\alpha_1, \\
\alpha_1\alpha_4\alpha_2\alpha_3 & \text{et} & \alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_1, \\
\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4 & \text{et} & \alpha_4\alpha_1\alpha_3\alpha_2, \\
\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_3 & \text{et} & \alpha_3\alpha_1\alpha_4\alpha_2, \\
\alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2 & \text{et} & \alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3.
\end{array}$$

3. Nous représenterons par $2A_n$ le nombre des permutations alternées de n éléments distincts. Comme il n'y a de permutations alternées que parmi les permutations d'au moins trois éléments, les symboles A_0, A_1, A_2 sont dépourvus de sens. Pour la régularité des formules, nous les emploierons néanmoins, en convenant de les regarder comme égaux chacun à l'unité.

Le nombre A_n, moitié du nombre des permutations alternées de n éléments distincts, possède ainsi, on le voit, une définition très simple, très nette, purement combinatoire et indépendante de toute considération de développement.

II. — *Calcul des nombres* A_n.

4. Comme nous l'avons déjà fait observer [1], le moyen général de calculer les nombres tels que A_n qui se présentent dans l'analyse combinatoire consiste à déterminer une relation entre le nombre A_{n+1}, par exemple, et les nombres analogues d'indices moindres A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, ... Pour parvenir à une pareille relation, nous partagerons les permutations alternées des $n+1$ éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ en $n+1$ classes, savoir : les permutations alternées où l'élément α_{n+1} occupe la première place; celles où il occupe la deuxième place ; celles où il occupe la troisième place; ...; celles où il occupe la $(n+1)^{\text{ième}}$ place.

5. Formons toutes les permutations alternées des $n+1$ éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$, où l'élément α_{n+1}, qui possède l'indice le plus élevé, occupe la $(p+1)^{\text{ième}}$ place.

La première opération à effectuer, c'est évidemment de partager les n autres éléments en deux groupes, l'un de p éléments qu'on devra placer avant α_{n+1}, l'autre de $n-p$ éléments qu'il faudra placer après. Et ce partage en deux groupes pourra s'effectuer d'un nombre de ma-

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1879.

nières différentes égal au nombre C_n^p des combinaisons simples de n objets p à p.

Supposons qu'on ait effectué ce partage de l'une quelconque de ces C_n^p manières. Les p éléments du premier groupe devront être disposés en une permutation alternée où l'indice de l'avant-dernier élément surpasse celui du dernier. Le nombre des dispositions différentes dont ces p éléments sont susceptibles est donc égal à la moitié du nombre des permutations alternées de p éléments distincts, c'est-à-dire à A_p. De même, les $n-p$ éléments du second groupe devant former une permutation alternée où l'indice du premier élément soit moindre que celui du second, ces $n-p$ éléments seront susceptibles d'un nombre de dispositions différentes égal à A_{n-p}.

Par conséquent, à un seul mode, quelconque d'ailleurs, de partage en deux groupes des n éléments autres que α_{n+1}, correspond un nombre, égal au produit $A_p A_{n-p}$, de permutations alternées de $n+1$ éléments, dans chacune desquelles α_{n+1} occupe la $(p+1)^{\text{ième}}$ place. Et il s'ensuit immédiatement que le nombre des permutations de ce genre que donnent tous les modes de partage, c'est-à-dire le nombre total des permutations alternées de $n+1$ éléments, où α_{n+1} occupe la $(p+1)^{\text{ième}}$ place, est égal au produit $C_n^p A_p A_{n-p}$.

6. Ainsi, le nombre des permutations alternées de $n+1$ éléments distincts, où l'élément α_{n+1} occupe la première place, est $C_n^0 A_0 A_n$.

Le nombre de celles où il occupe la deuxième place est $C_n^1 A_1 A_{n-1}$.

Le nombre de celles où il occupe la troisième place est $C_n^2 A_2 A_{n-2}$.

Et ainsi de suite.

En ajoutant tous ces résultats, on trouve évidemment le nombre total $2A_{n+1}$ des permutations alternées de $n+1$ éléments distincts. De là l'identité

$$2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \ldots + C_n^n A_n A_0.$$

D'ailleurs, le mode de raisonnement que nous venons d'employer nous montre bien que cette identité est exacte pour toutes les valeurs de n supérieures à l'unité. Il se trouve qu'elle subsiste encore lorsque n

est égal à l'unité, mais elle n'est plus vraie dans le cas où n est égal à zéro.

7. Cette identité donne un moyen simple de calculer, de proche en proche, les nombres A_n. Elle est d'un emploi d'autant plus commode qu'elle ne renferme, à son second membre, ni signe $-$, ni nombre fractionnaire. Nous avons, par convention (**5**),

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1.$$

En appliquant notre formule, nous trouvons

$$A_3 = 2, \quad A_4 = 5, \quad A_5 = 16, \quad A_6 = 61,$$
$$A_7 = 272, \quad A_8 = 1385, \quad A_9 = 7936, \quad \ldots.$$

Nous donnerons, dans la suite du présent travail, d'autres formules, encore plus simples, pour effectuer ce même calcul.

III. — *Fonction génératrice des fractions* $\frac{A_n}{n!}$.

8. Posons d'abord

$$\frac{A_n}{n!} = a_n.$$

L'identité précédemment trouvée (**6**) se transforme en celle-ci

$$2(n+1)a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_n a_0,$$

qui est, comme la précédente, exacte pour n égal ou supérieur à l'unité, mais fausse pour $n = 0$.

Puis, désignons par Y la fonction génératrice de $\frac{A_n}{n!}$, c'est-à-dire de a_n. Nous aurons, d'après la définition bien connue des fonctions génératrices,

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

et la question que nous nous proposons présentement, c'est de déterminer Y.

9. Pour cela, revenons à l'identité (8) qui lie le nombre a_{n+1} aux nombres $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$. Sa forme nous suggère l'idée de considérer le carré de Y. En le formant, nous trouvons

$$Y^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_1) x^2 + \ldots;$$

c'est-à-dire, si nous faisons usage de l'identité rappelée, en évitant soigneusement de l'employer dans le cas de $n = 0$, où elle est fausse,

$$Y^2 = a_0^2 + 2 \cdot 2 a_2 x + 2 \cdot 3 a_3 x^2 + \ldots.$$

Dans ce nouveau second membre, la série qui suit a_0^2 est évidemment égale à

$$2\left(\frac{dY}{dx} - a_1\right).$$

Donc, nous avons identiquement l'équation différentielle suivante

$$Y^2 = a_0^2 + 2\left(\frac{dY}{dx} - a_1\right),$$

qui devient, lorsqu'on y remplace a_0 et a_1 chacun par l'unité,

$$Y^2 = 2\frac{dY}{dx} - 1.$$

Nous en déduisons

$$\operatorname{arctang} Y = \frac{x}{2} + C;$$

et, puisque Y se réduit à a_0, c'est-à-dire à l'unité, lorsque $x = 0$, la

constante C est égale à $\frac{\pi}{4}$. Donc, finalement,

$$Y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Telle est la fonction génératrice du nombre a_n, c'est-à-dire de $\frac{A_n}{n!}$.

10. Nous pouvons donc écrire

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

ou bien, en revenant aux nombres A_n,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

C'est cette dernière formule [1] qui va servir de fondement à toute la suite de ce Mémoire.

IV. — *Développements de* $\sec x$ *et de* $\operatorname{tang} x$.

11. Notre formule fondamentale

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

devient immédiatement, par le changement de x en $-x$,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = A_0 - A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} - A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

---

[1] Présentée à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 12 mai 1879.

Or, nous avons ces deux identités

$$2\,\text{séc}\,x = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

$$2\,\text{tang}\,x = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Donc

$$\text{séc}\,x = A_0 + A_2\frac{x^2}{2!} + A_4\frac{x^4}{4!} + A_6\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\text{tang}\,x = A_1\frac{x}{1!} + A_3\frac{x^3}{3!} + A_5\frac{x^5}{5!} + A_7\frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Ces deux formules donnent, on le voit, les développements de sécx et de tang$x$, suivant les puissances croissantes de x, et elles rendent manifeste une corrélation remarquable entre les coefficients de ces deux développements.

12. Il y a environ deux cents ans que les géomètres ont commencé à s'occuper du développement de tang$x$, et probablement de celui de sécx, car on trouve, vers la fin du XVIIe siècle, dans le *Commercium epistolicum*, une lettre de Grégory où il est question du premier de ces développements. Toutefois, il nous semble que ce n'est qu'en ces derniers temps qu'on a eu l'idée de considérer, au lieu des coefficients a_n qui sont fractionnaires, leurs numérateurs A_n qui sont entiers; de chercher des formules simples pour calculer ces numérateurs; enfin de rapprocher, comme nous venons de voir qu'on doit le faire, les deux développements de sécx et de tang$x$. L'honneur en revient, croyons-nous, à M. Catalan.

Dans un article faisant partie de ses *Notes d'Algèbre et d'Analyse* [1], M. Catalan pose en effet, *a priori*,

$$\text{séc}\,x = G_0 + G_2\frac{x^2}{2!} + G_4\frac{x^4}{4!} + G_6\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\text{tang}\,x = G_1\frac{x}{1!} + G_3\frac{x^3}{3!} + G_5\frac{x^5}{5!} + G_7\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

[1] Extraits du Tome XLII des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Belgique*; 1877.

et, par cela seul, il établit, entre ces deux développements, le rapprochement qu'il faut établir. De plus, il considère, comme on le voit, non pas le coefficient fractionnaire de x^n, mais le coefficient entier de $\frac{x^n}{n!}$. Enfin, par des considérations tirées des développements eux-mêmes, il obtient, pour calculer les nombres G, la formule

$$2G_{n+1} = C_n^0 G_0 G_n + C_n^1 G_1 G_{n-1} + C_n^2 G_2 G_{n-2} + \ldots + C_n^n G_n G_0,$$

qui se confond avec celle que nous avons obtenue plus haut (6) pour le calcul des nombres A.

Après ce travail de M. Catalan, il ne restait plus à découvrir que la signification combinatoire des nombres G, lesquels n'étaient encore définis que par les développements mêmes où ils figurent. Ce problème est résolu par le présent travail. Il est clair, en effet, que les coefficients G et les coefficients A ne diffèrent point. Or, d'après ce qui précède, les nombres A possèdent une définition combinatoire très simple, très nette, et par conséquent une existence propre, indépendante de tout développement.

Ainsi, la notion des permutations alternées donne la signification combinatoire des coefficients des développements de sécx et de tang$x$, tout comme la notion des combinaisons simples donnait celle des coefficients du binôme. La meilleure manière de définir le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^m$, c'est de dire qu'il est le nombre des combinaisons simples de m objets n à n. De même, la meilleure manière de définir le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement, soit de tang$x$, soit de sécx, c'est de dire qu'il est la moitié du nombre des permutations alternées de n éléments.

V. — *Divers développements et séries.*

13. En tenant compte de la forme, facile à déterminer, des développements de cot$x$ et de cosécx, s'appuyant sur les développements

obtenus (11) de $\sec x$ et de $\operatorname{tang} x$, et s'aidant des identités simples

$$\cot x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

on arrive à ces deux développements :

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{A_1}{2^2-1}\frac{x}{1!} - \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^3}{3!} - \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2}\frac{x}{1!} + \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3}\frac{x^3}{3!} + \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

14. En différentiant par rapport à x les développements de $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sec x$ et $\operatorname{cosec} x$, on obtient les résultats suivants :

$$\sec^2 x = A_1 + A_3\frac{x^2}{2!} + A_5\frac{x^4}{4!} + A_7\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{A_1}{2^2-1} + \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^2}{2!} + \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$\sec x \operatorname{tang} x = A_2\frac{x}{1!} + A_4\frac{x^3}{3!} + A_6\frac{x^5}{5!} + A_8\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\operatorname{cosec} x \cot x = \frac{1}{x^2} - \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2} - \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3}\frac{x^2}{2!} - \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

15. En intégrant les formules qui donnent $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sec x$ et $\operatorname{cosec} x$, et choisissant convenablement les constantes d'intégration, on arrive à ces développements :

$$\mathrm{L}\cos x = -A_1\frac{x^2}{2!} - A_3\frac{x^4}{4!} - A_5\frac{x^6}{6!} - A_7\frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\mathrm{L}\sin x - \mathrm{L}x = -\frac{A_1}{2^2-1}\frac{x^2}{2!} - \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^4}{4!} - \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^6}{6!} - \frac{A_7}{2^8-1}\frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_0\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^3}{3!} + A_4\frac{x^5}{5!} + A_6\frac{x^7}{7!} + A_8\frac{x^9}{9!} + \cdots,$$

$$\mathrm{L}\operatorname{tang}\frac{x}{2} - \mathrm{L}\frac{x}{2} = \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3}\frac{x^4}{4!}$$
$$+ \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^6}{6!} + \frac{2^7-1}{2^8-1}\frac{A_7}{2^7}\frac{x^8}{8!} + \cdots.$$

16. En comparant les développements de $\sec x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$ et $\operatorname{cosec} x$ qui précèdent aux quatre formules connues :

$$\sec x = \pi \sum_1^\infty {}_t \frac{(-1)^t (2t-1)}{x^2 - (2t-1)^2 \frac{\pi^2}{4}},$$

$$\operatorname{tang} x = 2x \sum_1^\infty {}_t \frac{1}{(2t-1)^2 \frac{\pi^2}{4} - x^2},$$

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^\infty {}_t \frac{1}{x^2 - t^2\pi^2},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^\infty {}_t \frac{(-)^t}{x^2 - t^2\pi^2},$$

on obtient, pour toutes les valeurs de n entières et supérieures à zéro, les égalités suivantes :

$$\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \cdots = \frac{1}{2} \frac{A_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1},$$

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots = \frac{1}{2} \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n},$$

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \frac{1}{2} \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}-1},$$

$$\frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}-1} \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n},$$

dont la troisième et la quatrième peuvent se tirer de la seconde.

17. Toutes les formules (**13, 14, 15, 16**) de ce paragraphe étaient déjà connues; mais l'introduction du symbole A_n, moitié du nombre des permutations alternées de n éléments distincts, leur donne, selon nous, un nouveau degré d'intérêt.

VI. — *Remarques sur les fonctions elliptiques.*

18. La fonction elliptique $\lambda(x)$ satisfait, comme on sait, à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

et se développe, suivant les puissances ascendantes de la variable x, sous la forme

$$\lambda(x) = \frac{x}{1!} - P_1\frac{x^3}{3!} + P_2\frac{x^5}{5!} - P_3\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

dans laquelle $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sont des polynômes déterminés, entiers par rapport au carré k^2 du module.

Or, l'équation différentielle qui précède nous montre que, lorsque $k = 1$, la fonction $\lambda(x)$ se réduit à l'expression $-i \operatorname{tang} ix$, dans laquelle i représente $\sqrt{-1}$. Si nous nous reportons alors au développement donné plus haut (11) pour $\operatorname{tang} x$, et que nous représentions toujours par A_n la moitié du nombre des permutations alternées de n éléments distincts, nous voyons que, pour $k = 1$, le développement de $\lambda(x)$ devient

$$A_1\frac{x}{1!} - A_3\frac{x^3}{3!} + A_5\frac{x^5}{5!} - A_7\frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Il s'ensuit immédiatement que, dans les polynômes $P_1, P_2, P_3, \ldots$, qui sont entiers en k^2, les sommes des coefficients sont respectivement égales aux nombres $A_3, A_5, A_7, \ldots$.

19. De même, les deux fonctions elliptiques $\mu(x)$, $\nu(x)$ satisfont respectivement aux deux équations différentielles

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 = (1 - k^2) + (2k^2 - 1)\mu^2 - k^2\mu^4,$$

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 = (k^2 - 1) + (2 - k^2)\nu^2 - \nu^4,$$

et se développent respectivement sous les formes

$$\mu(x) = 1 - Q_1 \frac{x^2}{2!} + Q_2 \frac{x^4}{4!} - Q_3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\nu(x) = 1 - R_1 \frac{x^2}{2!} + R_2 \frac{x^4}{4!} - R_3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

dans lesquelles $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont des polynômes entiers en k^2

Or, on voit facilement que, lorsque $k = 1$, chacune des fonctions $\mu(x)$, $\nu(x)$ se réduit à $\sec ix$, la lettre i représentant toujours le symbole $\sqrt{-1}$.

Donc, lorsque $k = 1$, chacun des développements précédents se réduit à

$$A_0 - A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} - A_6 \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Donc, dans les polynômes $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, comme dans les polynômes $R_1, R_2, R_3, \ldots$, les sommes des coefficients sont respectivement égales à $A_2, A_4, A_6, \ldots$, c'est-à-dire aux moitiés des nombres des permutations alternées de 2, 4, 6, ... éléments distincts.

VII. — *Propriétés des nombres* A_n.

20. Le nombre A_n étant le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement soit de $\sec x$, soit de $\operatorname{tang} x$, la considération de ces développements fournit diverses égalités où figurent les nombres A_n. Nous ne considérerons parmi elles que celles qui nous paraîtront simples et intéressantes.

21. Reprenons la formule fondamentale

$$(\alpha) \qquad 2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \ldots + C_n^n A_n A_0,$$

que nous avons établie en commençant (**6**), qui subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à zéro, et où les coefficients C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n sont ceux de la $n^{\text{ième}}$ puissance du binôme.

Cette formule constitue une relation du second degré entre les nombres A. Ce n'est point la seule relation de cette espèce qui existe entre ces nombres; nous allons facilement en établir plusieurs autres.

Pour cela, prenons simultanément les deux formules

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=A_0+A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!}+A_3\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$
$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=A_0-A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!}-A_3\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

que nous avons déjà considérées (**11**). En les multipliant membres à membres, et remarquant que le produit des deux premiers membres est égal à l'unité, nous trouvons la formule

$$(\beta)\qquad C_n^0A_0A_n-C_n^1A_1A_{n-1}+C_n^2A_2A_{n-2}-\ldots\pm C_n^nA_nA_0=0,$$

qui est encore une relation du second degré entre les nombres A, où les coefficients C ont la même signification que dans la formule fondamentale, et qui se réduit à une identité évidente lorsque l'indice n est un nombre pair.

Cette seconde formule, combinée avec notre formule fondamentale, nous fournit immédiatement les deux relations

$$(\gamma)\qquad A_{n+1}=C_n^0A_0A_n+C_n^2A_2A_{n-2}+C_n^4A_4A_{n-4}+\ldots,$$
$$(\delta)\qquad A_{n+1}=C_n^1A_1A_{n-1}+C_n^3A_3A_{n-3}+C_n^5A_5A_{n-5}+\ldots,$$

dont la seconde a été donnée [1] déjà par M. Catalan, dans le cas particulier où n est un nombre pair.

22. On trouve encore des relations du second degré entre les

---

[1] *Loc. cit.*

nombres A, en partant de l'identité

$$\left(1 - \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 + \operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

On arrive ainsi, en effet, aux deux relations

$$(\varepsilon)\quad 2^{2n}A_{2n} = 2C_{2n}^{1}A_1A_{2n-1} + 2^3C_{2n}^{3}A_3A_{2n-3} + \ldots + 2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}A_{2n-1}A_1,$$

$$(\zeta)\quad \left\{\begin{aligned}(2^{2n}-1)A_{2n+1} &= 2C_{2n+1}^{2}A_2A_{2n-1}\\ &\quad + 2^3C_{2n+1}^{4}A_4A_{2n-3} + \ldots + 2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n}A_{2n}A_1,\end{aligned}\right.$$

qui ont été trouvées déjà par M. Catalan [1], et qui sont vraies pour toutes les valeurs de n entières et supérieures à zéro.

La seconde de ces formules nous montre que, pour toutes ces mêmes valeurs de n, le nombre A_{2n+1} est divisible par 2^n. C'est une propriété fort curieuse du nombre A_{2n+1}. Il s'ensuit que le nombre des permutations alternées de $2n+1$ éléments distincts est toujours divisible par 2^{n+1}.

23. Pour obtenir, entre les nombres A, des relations du premier degré, il suffit de partir des identités

$$\operatorname{tang}x\cos x = \sin x,$$
$$\operatorname{séc}x\cos x = 1,$$

d'y remplacer chaque ligne trigonométrique par son développement, puis d'égaler dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x. On trouve ainsi, après quelques transformations très simples, les deux formules

$$(\eta)\quad C_{2n+1}^{0}A_{2n+1} - C_{2n+1}^{2}A_{2n-1} + C_{2n+1}^{4}A_{2n-3} - \ldots \pm C_{2n+1}^{2n}A_1 = (-1)^n,$$

$$(\theta)\quad C_{2n}^{0}A_{2n} - C_{2n}^{2}A_{2n-2} + C_{2n}^{4}A_{2n-4} - \ldots \pm C_{2n}^{2n}A_0 = 0.$$

---

[1] *Loc. cit.*

La première de ces deux formules montre immédiatement que, quand $2n+1$ est un nombre premier, $A_{2n+1}-(-1)^n$ est divisible par ce nombre. C'est là une propriété remarquable des coefficients du développement de $\operatorname{tang} x$.

24. On peut encore obtenir deux relations du premier degré en considérant les deux identités

$$(1+\cos 2x)\sec^2 x = 2,$$
$$(1+\cos 2x)\sec x \operatorname{tang} x = 2\sin x,$$

et utilisant les développements obtenus plus haut (**14**) pour $\sec^2 x$ et pour $\sec x \operatorname{tang} x$. On trouve ainsi

$$1)\quad C_{2n}^0 A_{2n+1} - 2C_{2n}^2 A_{2n-1} + 2^3 C_{2n}^4 A_{2n-3} - \ldots \pm 2^{2n-1} C_{2n}^{2n} A_1 = 0,$$
$$2)\quad C_{2n-1}^0 A_{2n} - 2C_{2n-1}^2 A_{2n-2} + 2^3 C_{2n-1}^4 A_{2n-4} - \ldots \pm 2^{2n-3} C_{2n-1}^{2n-2} = (-1)^{n-1}.$$

25. Dans chacune des relations du premier degré qui précèdent, les indices des nombres A sont tous de même espèce : tous pairs ou tous impairs. On peut obtenir facilement l'expression de A_{2n+1} en fonction des A précédents d'indices pairs, et aussi celle de A_{2n} en fonction des A précédents d'indices impairs.

Considérons, en premier lieu, l'identité

$$\operatorname{tang} x = \sec x \sin x,$$

remplaçons-y chaque ligne trigonométrique par son développement, et identifions les résultats. Nous trouvons

$$3)\quad A_{2n+1} = C_{2n+1}^1 A_{2n} - C_{2n+1}^3 A_{2n-2} + C_{2n+1}^5 A_{2n-4} - \ldots \pm C_{2n+1}^{2n+1} A_0.$$

Considérons, en second lieu, l'identité

$$\sec x \operatorname{tang} x = \sec^2 x \sin x,$$

et identifions encore les résultats qu'on obtient en remplaçant par son développement chacune des quantités $\sec x \operatorname{tang} x$, $\sec^2 x$ et $\sin x$. Nous arrivons à cette nouvelle formule,

$$(\mu)\quad A_{2n} = C^1_{2n-1} A_{2n-1} - C^1_{2n-1} A_{2n-3} + C^2_{2n-1} A_{2n-5} - \ldots \pm C^{2n-1}_{2n-1} A_1.$$

26. Enfin on peut obtenir une relation du premier degré où figurent tous les indices consécutifs n, $n-1$, $n-2$, ... En partant, en effet, de l'identité

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2},$$

on parvient à l'égalité

$$(\nu)\quad \left\{\begin{aligned} & 2^n C^0_n A_n - 2^{n-1} C^1_n A_{n-1} - 2^{n-2} C^2_n A_{n-2} \\ & \qquad + 2^{n-3} C^3_n A_{n-3} + \ldots \pm C^n_n A_0 = (-1)^p, \end{aligned}\right.$$

p étant la partie entière de la fraction $\frac{n}{2}$.

27. Toutes les formules qui précèdent peuvent être employées au calcul de proche en proche des nombres A, mais elles ne sont pas toutes également commodes.

Parmi celles du second degré, les plus commodes sont les formules (γ) et (δ). Elles permettent chacune de calculer les nombres A environ deux fois plus vite que par la formule fondamentale (α). Elles offrent cet avantage évident de ne présenter à leurs seconds membres ni signes $-$, ni dénominateurs. On leur peut reprocher d'exiger, pour chacun de leurs termes, deux multiplications.

Parmi les formules du premier degré, les plus commodes sont les formules (η), (θ), (λ), (μ). Elles ont le défaut de contenir des signes $-$, mais leurs seconds membres sont exempts de dénominateurs, et chacun de leurs termes n'exige qu'une seule multiplication.

On peut comparer enfin les degrés de commodité des formules (γ) et (δ) d'une part, et des formules (η), (θ), (λ) et (μ) de l'autre. Le

raisonnement semble insuffisant pour décider lesquelles sont les plus avantageuses. Je pencherais néanmoins pour les formules (7) et (8), qui sont du second degré, mais où les calculs s'effectuent sur des nombres plus petits.

28. Les formules qui précèdent se déduisent toutes d'identités relatives aux deux fonctions $\sec x$ et $\operatorname{tang} x$. En considérant les identités analogues relatives à $\operatorname{cosec} x$ et à $\cot x$, on obtiendrait d'autres formules, en général beaucoup moins simples que les précédentes.

Ces nouvelles formules d'ailleurs, de même que celles qui précèdent, pourraient servir à leur tour de points de départ pour de nouvelles recherches. Les nombres A sont liés, en effet, les uns aux nombres de Bernoulli, les autres à ceux d'Euler. A chaque relation entre les nombres A correspond donc une relation entre ces divers autres nombres, laquelle évidemment peut servir à les calculer.

Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle;

PAR M. H. LÉAUTÉ.

La solution des problèmes ordinaires de Mathématiques consiste habituellement dans le calcul d'une inconnue au moyen de quantités données, et peut, en général, se ramener à la détermination d'une fonction assujettie à certaines conditions.

En Analyse, on regarde la question comme résolue lorsqu'on connaît complètement cette fonction, c'est-à-dire lorsqu'on est à même d'obtenir toutes les valeurs qu'elle peut prendre pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable.

Il n'en est pas ainsi en Mécanique appliquée. Les seules valeurs de la variable à considérer sont alors les valeurs réelles, et, dans la plupart des cas, il suffit de déterminer la fonction cherchée dans un certain intervalle que fixent les conditions mêmes du mécanisme étudié.

C'est là une propriété caractéristique des problèmes de Mécanique appliquée.

Mais, au point de vue pratique, il en est une autre non moins importante. La valeur numérique de la fonction inconnue est seule utile et l'on doit regarder comme équivalentes, dans les applications, toutes les solutions donnant le même degré d'approximation.

En d'autres termes, la forme analytique de la fonction cherchée est

presque sans intérêt, et l'on doit se préoccuper surtout de l'approximation obtenue.

Les considérations suivantes justifient cette manière de voir.

Tout d'abord la solution rigoureuse de la question, si l'on pouvait l'avoir, ne saurait être réalisée en pratique avec une exactitude parfaite et ne vaudrait pas mieux, par suite, que toute solution approchée donnant précisément le degré d'approximation auquel l'état actuel de l'industrie permet d'atteindre.

En second lieu, les équations d'un problème quelconque de Mécanique appliquée sont toujours approximatives, car on est obligé de faire certaines hypothèses sur la constitution et la manière d'être des corps qui composent le mécanisme. La solution analytique de ces équations n'est donc pas, en fait, d'une exactitude absolue.

Enfin, la condition à laquelle est assujettie la solution trouvée d'être réalisée ensuite pratiquement exige que les résultats auxquels on arrive soient suffisamment simples. Cette condition seule serait de nature à faire abandonner la solution exacte du problème, si l'on pouvait l'obtenir, pour une solution approchée d'une application plus facile qui, en raison même de cette facilité d'exécution, se trouverait donner finalement une précision plus grande.

Si l'on considère, en outre, qu'en raison des difficultés de calcul il est souvent impossible d'arriver à la solution analytique rigoureuse, on comprendra l'intérêt que présente, en Mécanique appliquée, l'étude des solutions approchées, et de quelle utilité est leur emploi.

Mais cet emploi exige certaines précautions.

On sait, en effet, que les équations approchées ne peuvent pas, en général, être différentiées sans qu'il en résulte des erreurs dépassant les limites admissibles. On peut presque toujours, au contraire, les intégrer sans s'écarter de l'ordre d'approximation qu'elles comportent.

Il suit de là que les formules approchées dont on dispose en Mécanique appliquée sont surtout propres à fournir les valeurs moyennes [1] des quantités qui y figurent.

---

[1] Nous appelons *valeur moyenne* de $f(x)$ dans l'intervalle de a à b la quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Il faut donc éviter les différentiations dans le calcul des inconnues du problème, et il y a toujours avantage à exprimer ces inconnues à l'aide des valeurs moyennes des quantités dont elles dépendent.

En particulier, dans le cas le plus simple où l'inconnue ne dépend que d'une seule variable, il y a intérêt à substituer au développement de Maclaurin, où entrent les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives en un point déterminé, un autre développement procédant suivant les valeurs moyennes de la fonction et de ses dérivées dans l'intervalle que l'on considère.

C'est ce développement que nous allons indiquer, et les considérations qui précèdent montrent de quelles applications il est susceptible.

I. — *Détermination du polynôme en x de degré n tel que sa valeur moyenne et celles de ses n premières dérivées successives, dans un intervalle donné, soient égales à $n+1$ quantités données.*

Désignons par y le polynôme cherché, par $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ les valeurs fixées pour les valeurs moyennes, dans l'intervalle considéré, de ce polynôme et de ses n premières dérivées; par a et b les valeurs de la variable x, qui limitent cet intervalle, b étant la plus grande.

On doit avoir, par définition,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b y\,dx = Y_0, \\[2ex] \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \frac{dy}{dx}\,dx = Y_1, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex] \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \frac{d^n y}{dx^n}\,dx = Y_n; \end{array}\right.$$

mais, le polynôme y étant pris sous la forme

$$y = A_0\frac{x^n}{n!} + A_1\frac{x^{n-1}}{n-1!} + \cdots + A_n,$$

les équations de condition (1) deviennent

$$
\begin{aligned}
&A_0 \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)!} + A_1 \frac{b^n - a^n}{n!} + \ldots + A_n \frac{b-a}{1} = (b-a) Y_0,\\
&A_0 \frac{b^n - a^n}{n!} + A_1 \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + A_{n-1} \frac{b-a}{1} = (b-a) Y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_0 \frac{b-a}{1} = (b-a) Y_n,
\end{aligned}
$$

et l'on en déduit

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&A_0 = K_{1,1} Y_n,\\
&A_1 = K_{2,1} Y_n + K_{2,2} Y_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_n = K_{n+1,1} Y_n + K_{n+1,2} Y_{n-1} + \ldots + K_{n+1,n+1} Y_0,
\end{aligned}
\right.
$$

les quantités $K_{1,1}, K_{2,1}, \ldots, K_{n+1,n+1}$ étant des coefficients numériques.

Multiplions la première équation (2) par $\frac{x^n}{n!}$, la seconde par $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \ldots,$ la dernière par l'unité, et ajoutons, nous aurons

$$
\begin{aligned}
y = {} & K_{n+1,n+1} Y_0\\
& + \left(K_{n+1,n} + K_{n,n} \frac{x}{1}\right) Y_1 + \ldots + \left(K_{n+1,1} + K_{n,1} \frac{x}{1} + \ldots + K_{1,1} \frac{x^n}{n!}\right) Y_n
\end{aligned}
$$

ou

$$y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \ldots + P_n Y_n,$$

les quantités $P_0, P_1, \ldots, P_n$ étant des polynômes en x de degré égal à leur indice, et que nous désignerons sous le nom de *polynômes auxiliaires*.

Il est clair, d'après le raisonnement même qui vient d'être fait, que les polynômes auxiliaires sont indépendants des valeurs de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ que l'on s'est donné, et ne dépendent que des limites a et b considérées.

Le polynôme y cherché est ainsi déterminé par l'équation qui précède, et le problème posé se ramène à la recherche des polynômes P.

Nous allons chercher la loi de formation de ces polynômes.

II. — *Détermination des polynômes auxiliaires.*

Afin de simplifier les calculs, nous supposerons que les limites de l'intervalle dans lequel varie x sont $-h$ et $+h$, c'est-à-dire que nous changerons x en $x + \frac{a+b}{2}$, après avoir posé $b - a = 2h$.

Les équations de condition (1) deviennent alors

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} y\,dx = Y_0, \\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \frac{dy}{dx}\,dx = Y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \frac{d^n y}{dx^n}\,dx = Y_n, \end{cases}$$

où il faut supposer

$$y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \dots + P_n Y_n.$$

On en déduit, en tenant compte des degrés respectifs des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dP_1}{dx} Y_1 + \frac{dP_2}{dx} Y_2 + \dots + \frac{dP_n}{dx} Y_n, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \qquad\quad \frac{d^2 P_2}{dx^2} Y_2 + \dots + \frac{d^2 P_n}{dx^2} Y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{d^n P_n}{dx^n} Y_n, \end{aligned}$$

et, par suite, les équations (3) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} Y_0 \int_{-h}^{+h} P_0\,dx + Y_1 \int_{-h}^{+h} P_1\,dx + Y_2 \int_{-h}^{+h} P_2\,dx + \dots + Y_n \int_{-h}^{+h} P_n\,dx &= 2h Y_0, \\ Y_1 \int_{-h}^{+h} \frac{dP_1}{dx}\,dx + Y_2 \int_{-h}^{+h} \frac{dP_2}{dx}\,dx + \dots + Y_n \int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\,dx &= 2h Y_1, \\ Y_2 \int_{-h}^{+h} \frac{d^2 P_2}{dx^2}\,dx + \dots + Y_n \int_{-h}^{+h} \frac{d^2 P_n}{dx^2}\,dx &= 2h Y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n \int_{-h}^{+h} \frac{d^n P_n}{dx^n}\,dx &= 2h Y_n. \end{aligned}$$

Ces relations doivent être satisfaites, quelles que soient les valeurs données pour $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$; elles entraînent, en conséquence, les équations suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\displaystyle\int_{-h}^{+h} P_0\,dx = 2h, & \displaystyle\int_{-h}^{+h} P_1\,dx = 0, & \displaystyle\int_{-h}^{+h} P_2\,dx = 0, & \ldots, \displaystyle\int_{-h}^{+h} P_n\,dx = 0, \\
 & \displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{dP_1}{dx}\,dx = 2h, & \displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{dP_2}{dx}\,dx = 0, & \ldots, \displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\,dx = 0, \\
 & & \displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{d^2P_2}{dx^2}\,dx = 2h, & \ldots, \displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{d^2P_n}{dx^2}\,dx = 0, \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \displaystyle\int_{-h}^{+h} \frac{d^nP_n}{dx^n}\,dx = 2h.
\end{array}\right.$$

Ces équations suffisent pour déterminer les polynômes auxiliaires, car pour chacun d'eux on a un nombre d'équations égal à son degré augmenté d'une unité, c'est-à-dire égal au nombre de ses coefficients.

Elles montrent que chaque polynôme P est indépendant du degré n du polynôme y que l'on veut former, et ne dépend que de son degré à lui-même. Les polynômes auxiliaires forment donc une suite indéfinie parfaitement déterminée.

Ceci posé, remarquons que, si nous considérons les n équations

$$\int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^2P_n}{dx^2}\,dx = 0, \quad \ldots, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^nP_n}{dx^n}\,dx = 2h,$$

qui déterminent $\frac{dP_n}{dx}$, elles sont identiques aux n équations

$$\int_{-h}^{+h} P_{n-1}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{dP_{n-1}}{dx}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^{n-1}P_{n-1}}{dx^{n-1}}\,dx = 2h,$$

qui déterminent P_{n-1}; on a, par suite,

$$P_{n-1} = \frac{dP_n}{dx};$$

chaque polynôme P est donc la dérivée de celui qui le suit

C'est là une propriété fondamentale des polynômes auxiliaires, propriété qui les fait rentrer dans la classe des polynômes étudiés par M. Appell [1] et définis par la relation

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Pour le moment, nous chercherons à calculer les polynômes en question, et, dans ce but, nous les prendrons sous la forme

$$P_n = B_0 \frac{x^n}{n!} + B_1 h \frac{x^{n-1}}{n-1!} + \ldots + B_n h^n.$$

On voit tout d'abord que, par suite de la forme particulière choisie pour P_n, les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$ forment une suite indépendante de l'indice du polynôme P que l'on considère, c'est-à-dire qu'ils sont les mêmes dans tous les polynômes P où ils entrent.

En effet, puisque P_{n-1} est égal à $\frac{dP_n}{dx}$, on a

$$P_{n-1} = B_0 \frac{x^{n-1}}{n-1!} + B_1 h \frac{x^{n-2}}{n-2!} + \ldots + B_{n-1} h_{n-1},$$

et les coefficients sont bien les mêmes que ceux de P_n.

Le problème revient donc à déterminer la suite des coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$.

III. — *Loi de formation des coefficients des polynômes auxiliaires. Fonction génératrice de ces coefficients.*

Les $n+1$ équations qui déterminent P_n sont, comme nous l'avons vu,

$$\int_{-h}^{+h} P_n\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\,dx = 0, \quad \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{-h}^{+h} \frac{d^{n-1}P_n}{dx^{n-1}}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^n P_n}{dx^n}\,dx = 2h;$$

---

[1] APPELL, *Sur une certaine classe de polynômes* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IX; 1880).

elles peuvent s'écrire, en raison de la forme choisie pour P_n,

$$h^{n+1}\left(\frac{B_0}{n+1!}+\frac{B_1}{n!}+\cdots+\frac{B_n}{1}\right)=(-h)^{n+1}\left(\frac{B_0}{n+1!}-\frac{B_1}{n!}+\cdots\pm\frac{B_n}{1}\right),$$

$$h^n\left(\frac{B_0}{n!}+\frac{B_1}{n-1!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{1}\right)=(-h)^n\left(\frac{B_0}{n!}-\frac{B_1}{n-1!}+\cdots\mp\frac{B_{n-1}}{1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h^2\left(\frac{B_0}{2!}+\frac{B_1}{1}\right)=(-h)^2\left(\frac{B_0}{2!}-\frac{B_1}{1}\right),$$

$$h\left(\frac{B_0}{1}\right)=(-h)\left(\frac{B_0}{1}\right)+2h.$$

On déduit de ces équations, en partant de la dernière et opérant de proche en proche,

$$B_0=1,\quad B_1=0,\quad \frac{B_0}{3!}+\frac{B_2}{1}=0,\quad \frac{B_1}{3!}+\frac{B_3}{1}=0,\quad \ldots,$$

et, en général, si p est pair,

$$(5)\qquad \frac{B_1}{p-1!}+\frac{B_2}{p-3!}+\cdots+\frac{B_{p-1}}{1}=0,$$

et si p est impair,

$$(6)\qquad \frac{B_0}{p!}+\frac{B_2}{p-2!}+\cdots+\frac{B_{p-1}}{1}=0.$$

Ces relations montrent que les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants des limites h et $-h$ considérées, et que ce sont, par suite, des nombres. De plus, B_1 étant nul, tous les coefficients d'indice impair le seront aussi, c'est-à-dire que, dans chaque polynôme P, les puissances successives de x iront en décroissant de deux unités.

Cherchons la fonction génératrice des coefficients $B_0, B_2, \ldots$; cette fonction est définie par l'équation

$$\varphi(x)=B_0+B_2x^2+\ldots+B_{2q}x^{2q}+\ldots;$$

multiplions respectivement les deux membres par les deux membres

de l'identité

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2q+1}}{2q+1!} + \ldots,$$

nous aurons

$$\varphi(x)\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \left.\begin{array}{r} B_0 x + B_2 \\ + \frac{B_0}{3!} \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^3 + B_4 \\ + \frac{B_2}{3!} \\ + \frac{B_0}{5!} \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^5 + \ldots + B_{2q} \\ + \frac{B_{2q-2}}{3!} \\ + \frac{B_{2q-4}}{5!} \\ \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{B_0}{2q+1!} \end{array}\right| x^{2q+1} + .$$

Or, d'après la relation (6), le coefficient de x^{2q+1} est nul; on a donc, puisque B_0 est égal à l'unité,

$$\varphi(x)\frac{e^x + e^{-x}}{2} = x,$$

ce qui donne, pour la fonction génératrice cherchée,

$$\varphi(x) = \frac{2x}{e^x + e^{-x}},$$

et conduit, pour la valeur d'un coefficient quelconque B_{2n}, à l'expression

$$2n!\,B_{2n} = \left[\frac{d^{2n}\left(\frac{2x}{e^x + e^{-x}}\right)}{dx^{2n}}\right]_{x=0}.$$

Telle est l'expression générale des coefficients des polynômes auxiliaires; calculons maintenant la fonction génératrice de ces polynômes.

IV. — *Fonction génératrice des polynômes auxiliaires.*

Il nous suffira de chercher la fonction génératrice $\psi(xz)$ des polynômes de degré impair, car nous en déduirons immédiatement celle des

polynômes de degré pair. En effet, chacun de ces derniers étant la dérivée du polynôme de degré impair dont le degré est supérieur d'une unité, il est clair que, pour avoir leur fonction génératrice, il suffira de diviser par z la dérivée de $\psi(xz)$ par rapport à x.

La suite des polynômes de degré impair est

$$B_0 x, \quad B_0 \frac{x^3}{3!} + B_2 h^2 \frac{x}{1}, \quad B_0 \frac{x^5}{5!} + B_2 h^2 \frac{x^3}{3} + B_4 h^4 \frac{x}{1}, \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad B_0 \frac{x^{2p+1}}{2p+1!} + B_2 h^2 \frac{x^{2p-1}}{2p-1!} + \ldots + B_{2p} h^{2p} \frac{x}{1}, \quad \ldots;$$

la fonction génératrice cherchée $\psi(xz)$ peut donc se mettre sous la forme

$$\psi(xz) = B_0 \frac{x}{h} \left| \begin{array}{l} hz + B_2 \dfrac{x}{h} \\ \qquad + B_0 \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^3}{3!} \end{array} \right| \begin{array}{l} (hz)^3 + B_4 \dfrac{x}{h} \\ \qquad + B_2 \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^3}{3!} \\ \qquad + B_0 \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^5}{5!} \end{array} \left| \begin{array}{l} (hz)^5 + \ldots + B_{2p} \dfrac{x}{h} \\ \qquad + B_{2p-2} \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^3}{3!} \\ \qquad + B_{2p-4} \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^5}{5!} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + B_2 \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^{2p-1}}{2p-1!} \\ \qquad + B_0 \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^{2p+1}}{2p+1!} \end{array} \right| (hz)^{2p+1} + \ldots.$$

Ceci posé, formons l'expression

$$\varphi(hz) = B_0 + B_2 (hz)^2 + \ldots + B_{2p} (hz)^{2p} + \ldots,$$

et multiplions-la membre à membre par

$$\frac{e^{xz} - e^{-xz}}{2} = xz + \frac{x^3 z^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2p+1} z^{2p+1}}{2p+1!} + \ldots;$$

nous aurons

$$\varphi(hz)\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2}=B_0\frac{x}{h}\left|\begin{array}{l} hz+B_2\frac{x}{h} \\ \quad +B_0\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ \hline 3! \end{array}\right|\begin{array}{l} (hz)^3+\ldots+B_{2p}\frac{x}{h} \\ \qquad\qquad +B_{2p-2}\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ \hline 3! \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\Bigg|(hz)^{2p+1}+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(hz)\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2}=\psi(xz),$$

et, par suite,

$$\psi(xz)=\frac{2hz}{e^{hz}-e^{-hz}}\,\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2}=hz\,\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}},$$

d'après la valeur que nous avons obtenue précédemment pour la fonction φ génératrice des coefficients.

La fonction $\psi(xz)$ est relative aux polynômes de degré impair; pour en déduire la fonction $\chi(xz)$ génératrice des polynômes de degré pair, il suffit, comme nous l'avons dit, de poser

$$\chi(xz)=\frac{1}{z}\,\frac{d\psi(xz)}{dx}=hz\,\frac{e^{xz}+e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}};$$

on en déduit

$$P_{2n+1}=\left[\frac{d^{2n+1}\left(hz\,\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}}\right)}{dz^{2n+1}}\right]_{z=0},$$

$$P'_{2n}=\left[\frac{d^{2n}\left(hz\,\frac{e^{xz}+e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}}\right)}{dz^{2n}}\right]_{z=0}.$$

Il est clair que les deux formules obtenues rentrent l'une dans l'autre, et que l'on peut prendre pour fonction génératrice des polynômes auxiliaires, quelle que soit la parité de leur degré,

$$\frac{2hz}{e^{hz}-e^{-hz}}\,e^{xz}:$$

on a ainsi, pour expression générale des polynômes P_n,

$$P_n = \left[\frac{d^n \left(\frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}} e^{xz} \right)}{dz^n} \right]_{z=0}.$$

V. — *Propriétés caractéristiques des polynômes auxiliaires.*

Les polynômes auxiliaires dont nous venons de trouver la fonction génératrice jouissent de deux propriétés qui nous ont servi à les déterminer, et sur lesquelles il est utile que nous insistions.

Ces deux propriétés sont les suivantes :

1° Chacun des polynômes est la dérivée du polynôme de degré immédiatement supérieur ;

2° La valeur moyenne, dans l'intervalle considéré, d'un polynôme quelconque, est égale à zéro, sauf pour le premier dont la valeur moyenne est égale à l'unité.

La méthode même que nous avons suivie pour la détermination des polynômes auxiliaires montre que les deux propriétés dont il s'agit sont caractéristiques de ces polynômes, puisque c'est en nous appuyant sur elles seulement que nous avons pu les trouver. Il peut n'être pas sans intérêt de démontrer directement ce point important.

Pour cela, remarquons que, d'après la relation

$$P_{n-1} = \frac{dP_n}{dx},$$

la fonction génératrice de ces polynômes est de la forme

$$\psi(z) e^{zx},$$

ainsi que l'a démontré M. Appell [1].

On a donc

$$\psi(z) e^{zx} = \Sigma P_n z^n.$$

---

[1] Appell, *loc. cit.*

Prenons la valeur moyenne des deux membres; on obtient, d'après la seconde propriété,

$$\psi(z)(\text{moy}.\, e^{zx})_{-h}^{+h} = 1,$$

et comme

$$(\text{moy}.\, e^{zx})_{-h}^{+h} = \frac{e^{hz} - e^{-hz}}{2hz},$$

on en déduit

$$\psi(z) = \frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}},$$

ce qui donne, pour la fonction génératrice,

$$\frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}} e^{xz},$$

expression trouvée précédemment.

Nous indiquerons, pour compléter l'étude des polynômes auxiliaires, certaines propriétés particulières qu'ils présentent.

Il a été démontré au § III que ces polynômes avaient tous leurs termes de même parité; nous savons, de plus, que leurs valeurs moyennes dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ sont toutes nulles, sauf en ce qui concerne le premier. Si donc nous prenons un polynôme de degré impair autre que celui-là, il devra avoir des valeurs de signes contraires pour $-h$ et $+h$ d'après la première propriété rappelée, et des valeurs égales d'après la seconde.

Il en résulte que tous les polynômes de degré impair admettent pour racines $-h$, zéro et $+h$, excepté le premier qui, ainsi que nous l'avons vu, est égal à x.

Quant aux polynômes de degré pair qui sont les dérivées de polynômes de degré impair, ils auront tous, d'après le théorème de Rolle, au moins une racine réelle comprise entre $-h$ et zéro, et au moins une entre zéro et $+h$.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que les polynômes auxiliaires, quelle que soit la parité de leur degré, ne peuvent avoir dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ d'autres racines réelles que celles indiquées. En effet, considérons l'un quelconque d'entre eux, P_n; ses dérivées succes-

sives sont $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_1, P_0$; si l'on substitue dans $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_2$ les quantités $-h$ et $+h$, les résultats obtenus sont égaux s'il s'agit d'un polynôme de degré pair, et sont nuls si c'est un polynôme de degré impair que l'on considère. Il n'y a donc pas de variation perdue jusqu'à P_2 qui, étant égal à $\frac{3x^2-h^2}{3.2!}$, est positif pour $-h$ et $+h$. Mais P_1 passe de la valeur $-h$ à la valeur $+h$ et P_0 reste égal à l'unité; deux variations sont par suite perdues et, d'après le théorème de Fourier, il y a, au plus, deux racines réelles dans l'intervalle considéré.

Nous ajouterons, pour terminer l'étude de ces polynômes, qu'ils n'ont pas forcément toutes leurs racines réelles. On constate aisément que le polynôme P_5 a quatre racines imaginaires représentées par

$$x = \pm h\sqrt{3 \pm \frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}}.$$

VI. — *Développement d'une fonction dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ en série de polynômes auxiliaires.*

Nous avons établi, dans la théorie qui précède, que pour former le polynôme de degré n tel que sa valeur moyenne et celle de ses n dérivées successives dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ soient des quantités données $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$, il suffisait de former l'expression

$$P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \ldots + P_n Y_n,$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont les polynômes auxiliaires que nous savons calculer.

Nous avons reconnu de plus que ces polynômes formaient une suite indéfinie et que chacun d'eux était indépendant du degré de polynôme que l'on voulait former.

Il résulte de là que nous pouvons étendre indéfiniment le développement auquel nous sommes arrivé et représenter une fonction quel-

conque de x, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, par la série

$$y = P_0 (\text{moy.}\, y)_{-h}^{+h} + P_1 \left(\text{moy.}\, \frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} + P_2 \left(\text{moy.}\, \frac{d^2y}{dx^2}\right)_{-h}^{+h} + \cdots$$

Nous indiquerons ici les premiers termes de ce développement en remplaçant P_0, P_1 par leurs valeurs obtenues plus haut,

$$\begin{aligned} y = {} & (\text{moy.}\, y)_{-h}^{+h} + \frac{3.x}{3.1!} \left(\text{moy.}\, \frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} + \frac{3.x^2 - h^2}{3.2!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^2y}{dx^2}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3.x^3 - 3h^2.x}{3.3!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^3y}{dx^3}\right)_{-h}^{+h} + \frac{3.x^4 - 6h^2 + \frac{7}{5}h^4}{3.4!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^4y}{dx^4}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3.x^5 - 10h^2.x^3 + 7h^4.x}{3.5!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^5y}{dx^5}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3.x^6 - 15h^2.x^4 + 21h^4.x^2 - \frac{31}{7}h^6}{3.6!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^6y}{dx^6}\right)_{-h}^{+h} \\ & + \frac{3.x^7 - 21h^2.x^5 + 49h^4.x^3 - 31h^6.x}{3.7!} \left(\text{moy.}\, \frac{d^7y}{dx^7}\right)_{-h}^{+h} + \cdots \end{aligned}$$

On voit que, lorsque l'intervalle considéré diminue indéfiniment, c'est-à-dire lorsque h tend vers zéro, la série précédente devient celle de Maclaurin, ce qui pouvait se prévoir *a priori*.

Dans la plupart des questions de Mécanique appliquée, il suffira d'employer les deux ou trois premiers termes du développement.

Cela revient à remplacer la courbe représentatrice de la fonction inconnue soit par une droite comprenant la même aire totale et parallèle à la corde extrême, soit par un arc de parabole à axe vertical, détachant une aire équivalente, ayant sa corde extrême parallèle à celle de la courbe, et tel que la valeur moyenne de $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit la même que celle qui correspond à la courbe. Dans les deux cas, la ligne substituée à la courbe réelle traverse donc cette dernière de manière à déterminer une surface équivalente et à avoir la même direction moyenne.

Il en résulte que les erreurs à craindre dans l'intervalle considéré seront, en général, moindres que si l'on eût fait usage de la formule de Maclaurin.

Cette formule, en effet, qui donne une grande approximation dans

les environs du point de départ, expose à des erreurs très sensibles dès que l'on s'éloigne de ce point particulier.

Or, dans les questions de Mécanique pratique, c'est surtout la marche générale du phénomène qu'il importe de saisir plutôt que son expression exacte en un point donné. Aussi conviendra-t-il, dans la généralité des cas, d'employer de préférence le mode de développement que nous venons de faire connaître.

Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les Exercices d'Analyse et de Physique mathématique de Cauchy;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Il y a plus de dix-huit ans que, m'occupant de la théorie de la lumière, je lus pour la première fois, dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy, les Mémoires qui sont relatifs à cette théorie et que j'en vérifiai tous les calculs avec le plus grand soin. Cette lecture me conduisit presque immédiatement à faire différentes remarques sur cet Ouvrage, et je les communiquai, à cette époque, à Poncelet, qui m'engagea à plusieurs reprises à les publier dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Cependant je ne pus me résoudre alors à publier des critiques sur le travail d'un géomètre qui s'était acquis tant de réputation.

J'ai encore de cette époque plusieurs manuscrits sur la théorie de la lumière, et j'ai publié postérieurement un travail sur cette théorie [*Mémoire sur la dispersion de la lumière* (*Journal de Mathématiques*, 1866, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. X)]; toutefois, jusque dans ces derniers temps, je n'avais pas rédigé les remarques critiques dont je parle. Étant aujourd'hui plus connu dans la Science, je ne me crois plus obligé à la même circonspection, et j'ai pensé qu'elles pourraient avoir encore quelque intérêt, précisément à cause de la célébrité du géomètre auquel elles s'adressent. Ces réflexions portant sur-

tout sur des considérations physiques ou mécaniques, j'ai pu les retrouver sans peine, et mes souvenirs, au bout de dix-huit ans, ont été assez précis pour que la Note que je publie diffère peu, je crois, de celle que j'aurais publiée à cette époque.

Ces remarques sont si faciles, que je suis porté à croire que plusieurs géomètres se les sont faites à eux-mêmes; mais, comme elles ne paraissent pas avoir été publiées, elles peuvent avoir encore quelque utilité.

Premier Mémoire. — Quoique ce Mémoire ait pour titre : *Sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, le but de l'auteur est d'établir les principes de la théorie mathématique de la lumière.

Après avoir établi les équations différentielles du mouvement, et après avoir supposé que la constitution du système donné de molécules est partout la même, il imagine des ondes planes qui se propagent parallèlement à elles-mêmes, et dont le mouvement satisfait aux équations différentielles; les déplacements ξ, η, ζ de chaque molécule se trouvent être des expressions trigonométriques de la forme

$$\begin{aligned} &a\cos(ux+vy+wz-st),\\ &b\cos(ux+vy+wz-st),\\ &c\cos(ux+vy+wz-st), \end{aligned}$$

multipliées par une même exponentielle

$$e^{KR-St};$$

K, S sont des constantes et R est la distance de la molécule vibrante au plan

$$(a)\qquad Ux+Vy+Wz=0.$$

D'après ces formules, le mouvement se propageant en ondes planes parallèles au plan

$$ux+vy+wz=0,$$

chaque molécule décrit, *en général,* une ellipse dont l'auteur donne les équations.

Or, il est aisé de voir que le mouvement vibratoire elliptique ne peut, en général, se propager dans un cristal. Si, en effet, un rayon polarisé elliptiquement tombe, par exemple, sur un spath d'Islande, on sait que ce rayon, en pénétrant dans le cristal, se décompose en deux rayons, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire, et en général un rayon tombant sur un cristal uniaxe ou biaxe se décomposera en deux rayons dont les vibrations seront rectilignes et correspondront à deux ondes planes différentes.

Si un milieu est isotrope ou que la propagation du mouvement dans l'éther s'effectue de la même manière dans tous les sens, un rayon polarisé elliptiquement en tombant sur ce corps donne un rayon réfracté qui est aussi polarisé elliptiquement; mais alors il est inutile de considérer comme simples ces ondes à vibrations elliptiques, puisqu'elles peuvent être considérées comme la superposition de deux ondes planes simples à vibrations rectilignes, de phase différente et rectangulaires entre elles.

A la vérité, certains cristaux sont doués du pouvoir rotatoire et des vibrations elliptiques peuvent s'y propager; mais il est bien aisé de voir que les équations de Cauchy ne peuvent convenir à ces milieux. En effet, si dans les équations de Cauchy,

$$\left(\mathcal{G}+\frac{d^2\mathcal{F}}{du^2}\right)\xi+\frac{d^2\mathcal{F}}{du\,dv}\eta+\frac{d^2\mathcal{F}}{du\,dw}\zeta=s^2\xi,$$

etc.,

on exprime que le milieu est isotrope, et que par conséquent ces équations ne changent pas de forme par une transformation de coordonnées rectangulaires, alors, d'après un calcul extrêmement facile, longuement développé par Cauchy (p. 101 à 123), on reconnaît que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions de $u^2+v^2+w^2$ et (*voir* p. 137 à 142) il ne se produit que deux ondes planes simples parallèlement à un plan donné, l'une dans laquelle la vibration est transversale, l'autre dans laquelle la vibration est longitudinale. Or, si l'on prend une dissolution donée du pouvoir rotatoire, elle peut évidemment être considérée comme un corps isotrope, et il résulte des idées de Fresnel, qui ont été sur ce

point adoptées par tous les physiciens et les géomètres, que, parallèlement à un plan donné, il se propage dans ce corps deux ondes planes dont la vitesse de propagation est différente, et dans lesquelles la vibration est transversale et circulaire. Ainsi, sans être obligé aucunement de former les équations différentielles relatives au pouvoir rotatoire, on reconnaît que les équations de Cauchy ne peuvent expliquer ce phénomène, même dans le cas le plus simple.

Portons maintenant notre attention sur le coefficient par lequel se trouvent multipliées les composantes ξ, η, ζ de la vibration, et qui a pour valeur

$$e^{KR} . e^{-St},$$

K étant négatif et R étant la distance de la molécule vibrante au plan dont l'équation est (a). Le facteur e^{-St} est étranger aux phénomènes de la lumière; la quantité de la lumière qui se propage ne doit pas non plus varier, par suite de l'extinction, comme e^{KR}, mais comme e^{-mr}, r étant la distance de la molécule au plan

$$(b) \qquad ux + vy + wz = 0$$

parallèle aux ondes, comme on peut le démontrer par un raisonnement élémentaire employé dans les Ouvrages de Physique; de plus, le coefficient m peut varier avec les quantités u, v, w, qui déterminent le plan (b) et la longueur d'ondulation de la lumière.

Mais ce que je veux surtout faire remarquer, c'est que les équations différentielles de Cauchy doivent être considérées *a priori* comme ne pouvant s'appliquer qu'au mouvement de la lumière dans les corps parfaitement diaphanes, et, par suite, comme impropres à tenir compte de l'extinction de la lumière.

En effet, quand un rayon de lumière se propage en s'affaiblissant, c'est qu'une portion de la lumière ou, ce qui est la même chose, de chaleur rayonnante se change en chaleur obscure en se fixant dans le corps. Si nous supposons que le mouvement se propage en ondes planes d'une certaine couleur ou d'une durée de vibration déterminée, alors, quand l'onde passera d'une position à une position suivante infiniment voisine, une partie du mouvement se propagera sans changer de nature et en conservant la même durée de vibration, une autre partie changera de nature.

De ces deux phénomènes, on peut n'en examiner qu'un seul, le premier, qui est le plus simple, mais c'est à la condition d'introduire dans les équations différentielles des termes qui tiennent compte de l'absorption de la lumière, ainsi qu'on tient compte en Mécanique des frottements, sans être obligé de connaître exactement leur nature. Il faudra donc, pour avoir égard à l'absorption de la lumière, introduire dans les équations différentielles des termes analogues à ceux que Navier a fait entrer dans les équations différentielles de l'Hydrodynamique, afin d'avoir égard à la cohésion des liquides. Ce n'est qu'à cette condition qu'on pourra introduire dans les intégrales du mouvement vibratoire le coefficient e^{-mr} dont j'ai parlé ci-dessus, et qui exprime l'extinction.

Ainsi, on reconnaît que les équations de Cauchy ont une généralité qui est étrangère aux phénomènes de la Physique. En général, un mouvement simple par ondes planes se ferait d'après ses équations avec vibrations elliptiques, ce qui est contraire au phénomène ordinaire de la double réfraction, et ses équations ne peuvent expliquer la polarisation rotatoire, quand la vibration est effectivement circulaire ou elliptique. Enfin ses équations sont tout à fait impropres à exprimer l'extinction de la lumière.

Deuxième Mémoire, p. 33. — Il a pour titre : *Sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement*. Comme le dit l'auteur à la page 37, son but, en exposant ce travail, est dans l'application qu'il croit qu'on en peut faire à la théorie de la lumière, en supposant que l'un des deux systèmes soit celui des molécules d'éther et l'autre celui des molécules du corps renfermant cet éther. Rien n'est plus naturel que de faire cet essai ; mais, si on l'opère, on peut reconnaître au moins, lorsque le corps est parfaitement diaphane, que, pour rendre compte des phénomènes de la lumière, il faut admettre que les molécules du corps n'ont aucune action dynamique sur l'éther, mais seulement une action statique qui change son élasticité d'une manière variable avec la direction.

Comme je ne veux point exposer ici une théorie de la lumière, je ne m'arrêterai pas à cette question, non plus qu'à démontrer que les équations de Cauchy pour un seul système de molécules ne peuvent expliquer les phénomènes connus de la double réfraction.

Troisième Mémoire, p. 101. — *Sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendante des trois axes de coordonnées supposées rectangulaires ou de deux d'entre eux.*

Ce Mémoire est très facile et ne donne lieu à aucune remarque.

Quatrième et cinquième Mémoires, p. 133-178 et 212-269, qui traitent de la réflexion et de la réfraction pour les milieux isotropes.

J'ai expliqué ci-dessus que les équations de Cauchy sont impropres à exprimer l'extinction de la lumière. Page 140, revenant sur les formules du mouvement simple dans le cas où le milieu est isotrope et où la propagation des mouvements vibratoires s'y effectue en tous sens de la même manière, il suppose que, les ondes planes se propageant parallèlement au plan

$$(b) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

l'extinction de la lumière varie avec la distance R à un autre plan

$$Ux + Vy + Wz = 0.$$

Il est cependant en quelque sorte plus évident encore, quand le milieu est isotrope, que cette extinction ne peut dépendre que de la distance r au plan (b). J'ai montré ci-dessus que le coefficient qui exprime l'extinction est de la forme e^{-mr}, m ne dépendant que de u, v, w; dans un corps isotrope, m ne dépendra plus que de la seule quantité $u^2+v^2+w^2$.

Mais arrivons au point le plus important de ces deux Mémoires. L'étude que l'on se propose dépend entièrement de ce qui se passe à la séparation des deux milieux, et il paraît indispensable aussi bien pour les géomètres que pour les physiciens d'entrer à ce sujet dans des considérations mécaniques; cependant Cauchy préfère y substituer des hypothèses purement analytiques, qui n'ont rien d'obligatoire, en s'appuyant sur un Mémoire qu'il a publié ailleurs (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1839, 1er semestre, dans trois articles, p. 374, 432 et 459). Il arrive ainsi à un théorème dont le long énoncé (p. 152 et 153) est *a priori* bien peu satisfaisant pour servir de base à une théorie.

Or, je veux montrer combien la manière de raisonner de Cauchy

dans cette question est dangereuse, en faisant une hypothèse mécanique beaucoup plus vraisemblable et bien plus facile à comprendre que ses hypothèses analytiques, mais qui a beaucoup d'analogie avec les siennes et qui présente exactement la même faute.

Cette hypothèse mécanique consiste à supposer que les forces élastiques développées par le mouvement du fluide éthéré sont égales de part et d'autre au plan de séparation des deux milieux et infiniment près de ce plan.

Soient

Oz la trace du plan d'incidence d'un rayon de lumière simple sur le plan de séparation;
Ox une normale à ce dernier plan;
Oy une perpendiculaire au plan d'incidence.

Désignons les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, des forces élastiques exercées sur un élément plan, suivant que cet élément plan est perpendiculaire

$$\begin{array}{lll} \text{à } Ox & \text{par} & \left\{ \begin{array}{l} N_1, T_3, T_2, \\ T_3, N_2, T_1, \\ T_2, T_1, N_3. \end{array} \right. \\ \text{à } Oy & \text{»} & \\ \text{ou à } Oz & \text{»} & \end{array}$$

En désignant par ξ, η, ζ les composantes de la vibration et par μ un coefficient constant, on a, comme on sait,

$$N_1 = 2\mu\frac{d\xi}{dx}, \quad N_2 = 2\mu\frac{d\eta}{dy}, \quad N_3 = 2\mu\frac{d\zeta}{dz},$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right), \quad T_2 = \mu\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right), \quad T_3 = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Sur le plan des y, z à la limite du premier milieu, ξ, η, ζ doivent être remplacés par la somme des composantes des vibrations du rayon incident et du rayon réfléchi; dans le second milieu, ξ, η, ζ sont les composantes de la vibration du rayon réfracté.

Le rayon étant pris simple et polarisé, on peut le supposer décomposé en deux autres rayons simples et tels que les vibrations de l'un

soient perpendiculaires au plan d'incidence et les vibrations de l'autre soient dans ce plan.

La quantité μ est celle que l'on désigne sous le nom d'*élasticité* dans la théorie de la lumière; d'après Fresnel, cette élasticité serait égale dans les deux milieux; or, en admettant cette hypothèse et en supposant, suivant l'ordinaire, que la phase ne change pas dans la réflexion et la réfraction, voici ce que l'on trouve par des calculs faciles :

1° Si la vibration est perpendiculaire au plan d'incidence, l'hypothèse de l'égalité des forces élastiques de part et d'autre du plan yOz détermine complètement les mouvements réfléchi et réfracté, et l'on obtient précisément les formules de Fresnel.

2° Si la vibration est située dans le plan d'incidence, l'hypothèse de l'égalité des forces élastiques détermine encore complètement les mouvements réfléchi et réfracté. Des deux équations que l'on obtient, l'une s'accorde avec les équations de Fresnel, mais l'autre qui provient de l'égalité des forces T_2 est en contradiction avec ces équations.

Donc, le rayon étant supposé polarisé dans un plan quelconque, la théorie de Fresnel conduit à l'égalité des forces

$$N_1,\ N_2,\ N_3\ T_1,\ T_3$$

au contact des deux milieux, mais non à l'égalité des forces T_2.

Néanmoins, il n'y aurait pas à hésiter dans un choix entre ces deux théories; en effet, dans la théorie de Fresnel, le principe des forces vives est satisfait; dans celle que je viens d'indiquer, il ne l'est pas. Je vais maintenant démontrer que la théorie de Cauchy présente exactement la même faute.

En effet Cauchy met, page 170, ses équations de condition relatives à la surface réfléchissante et qui doivent avoir lieu pour $x = 0$ sous cette forme :

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\eta'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dy},\\ &\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\zeta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dz},\\ &\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi'}{dy} - \frac{d\eta'}{dx},\end{aligned}\right.$$

$$(40)\qquad \overline{\eta} + D_y\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} - \frac{D_x}{vv'}\right)\overline{\xi} = \eta' + D_y\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'} + \frac{D_x}{vv'}\right)\overline{\xi'}.$$

Les trois premières équations s'accordent avec celles de Fresnel, et on le vérifiera de la manière suivante :

1° Si la vibration est perpendiculaire au plan d'incidence, on aura

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \xi' = 0, \quad \zeta' = 0,$$

et ces trois équations reviennent aux deux équations de Fresnel.

2° Si la vibration est située dans le plan d'incidence, on aura

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0, \quad \frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\xi'}{dy} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dy} = 0, \quad \frac{d\zeta'}{dy} = 0,$$

et ces trois équations se réduisent à une seule, qui est encore une des équations de Fresnel.

Quant à l'équation (40), on voit aisément qu'on doit la rejeter, parce qu'elle est, en général, en contradiction avec le principe des forces vives.

Ordinairement on suppose une relation d'égalité entre les deux milieux éthérés; ou l'on admet avec Fresnel que l'élasticité de l'éther est la même dans les deux milieux, ou l'on admet avec Neumann que la densité de l'éther y est la même. Cauchy, au contraire, a établi ces formules en ne supposant aucune relation entre les deux milieux. C'est seulement à la page 246 qu'il particularise ses formules de manière qu'un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence puisse, sous une incidence convenable, disparaître dans la réflexion : fait d'expérience peu propre à servir de base à une théorie physico-mathématique. (En effet, en Physique mathématique, on ne doit pas partir de faits d'expérience, mais on doit les retrouver d'après les principes physiques d'où l'on est parti.) Il obtient alors des formules qui donnent les mêmes lois expérimentales que celles de Fresnel; elles ne sont pas cependant identiques, car il est enfin obligé d'établir une relation d'égalité entre les natures des deux milieux qu'il écrit ainsi (p. 248),

$$(19) \qquad \frac{k^2}{1+f} = \frac{k'^2}{1+f'},$$

et qui n'exprime pas l'égalité d'élasticité des deux milieux, adoptée par Fresnel.

Désignons par ω la vitesse des ondes transversales, par Ω la vitesse des ondes longitudinales dans le premier milieu, par ω', Ω' les mêmes quantités dans le second milieu. L'équation (19) peut s'écrire

$$(1+f)\frac{s^2}{k^2} = (1+f')\frac{s^2}{k'^2},$$

$\frac{s}{k}$, $\frac{s}{k'}$ représentant les vitesses ω, ω' des ondes de même couleur dans les deux milieux; donc cette équation peut s'écrire

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\omega^2 = \frac{\Omega'^2}{\omega'^2}\omega'^2 \quad \text{ou} \quad \Omega = \Omega'.$$

Ainsi, Cauchy admettant que le mouvement de l'éther peut se propager en ondes longitudinales, l'équation (19) exprimerait, bien qu'il ne le dise pas, que les ondes simples longitudinales se propagent avec la même vitesse dans les deux milieux.

Mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que la formule (19), substituée à la condition de Fresnel, empêche que le principe des forces vives ait lieu, et que par cette seule raison la théorie de Cauchy pourrait être rejetée.

On se tromperait beaucoup si l'on concluait de ce qui précède que j'admets la théorie de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps isotropes telle qu'elle a été donnée par Fresnel; je n'ai, au contraire, aucun doute que ce soit la théorie de Neumann sur cette question qui soit la vraie. Si j'ai comparé la théorie de Cauchy à celle de Fresnel, c'est qu'elles ont beaucoup de rapports entre elles, et l'on doit reconnaître combien les considérations si simples de Fresnel sont supérieures à tous égards à ces deux Mémoires si compliqués de Cauchy.

Les formules qui viennent de nous occuper sont précédées de formules plus générales, d'après lesquelles il n'existe plus d'angle de polarisation complète; alors la vibration du rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence ne s'annule pour aucune valeur de l'incidence τ, mais devient seulement minimum et très petite pour une valeur φ de τ.

Le principe de la conservation de la force vive n'est plus rigoureu-

sement applicable, une petite quantité de lumière du rayon incident étant perdue par absorption ou diffusion, et il faut faire subir des modifications très petites aux formules de Fresnel ou à celles de Neumann, relatives à la réflexion et à la réfraction.

D'après ces formules, la vibration réfléchie pour un rayon incident polarisé perpendiculairement au plan d'incidence s'annule pour $\tau = \varphi$ et change de sens quand τ dépasse φ. Donc, d'après les nouvelles formules, quand on fera varier l'angle d'incidence entre $\tau = \varphi - s$ et $\tau = \varphi + s$, s étant très petit, la vibration réfléchie, qui s'effectue d'abord sensiblement dans le même sens que la vibration incidente, vibre en dernier lieu en sens contraire. La vibration du rayon incident étant désignée par $\sin\frac{2\pi t}{T}$ sur le plan réflecteur, Fresnel et Neumann représentent au même moment celle du rayon réfléchi par $v \sin\frac{2\pi t}{T}$. Comme nous supposons que v ne s'annule plus pour $\tau = \varphi$, mais devient seulement minimum, il faut, pour que la seconde vibration devienne de sens contraire à la première, qu'il se fasse un *changement continu de phase;* la vibration réfléchie sera donc représentée par $v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\psi}{l}\right)$, ψ variant depuis une fraction très petite de la demi-ondulation $\frac{l}{2}$ jusqu'à une quantité très voisine de $\pm\frac{l}{2}$. On en conclut facilement qu'un rayon de lumière polarisé rectilignement dans un azimut quelconque est par réflexion polarisé elliptiquement dans le voisinage de l'angle φ.

Il est aisé de voir que la théorie de Cauchy ne peut représenter ce phénomène; en effet, cette théorie n'étant pas exacte dans le cas le plus simple, elle ne peut l'être quand le phénomène se complique. De plus, les formules de cette théorie ne donnent pas, pour la différence de phase des deux rayons en lesquels on imagine décomposé le rayon polarisé réfléchi, l'expression désignée sous le nom de *formule de Cauchy* dans les Ouvrages de Physique.

En effet, en désignant par i l'argument de réflexion pour un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, c'est-à-dire l'angle que la réflexion ajoute à la phase du rayon, on déduit facilement des

formules de Cauchy

$$\operatorname{tang} i = \frac{\eta \sin 2\tau}{-\cos(\tau+\tau')\cos(\tau-\tau') + \eta^2 \sin(\tau+\tau')\sin(\tau-\tau')},$$

en faisant

$$\eta = \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}'}{1+\mathfrak{C}\mathfrak{C}'},$$

et désignant par τ, τ' les angles d'incidence et de réfraction. Suivant Cauchy, le rayon composant, polarisé suivant le plan d'incidence, ne subirait pas de changement de phase. Donc, si l'on a un rayon de lumière polarisé rectilignement, la différence de phase des deux rayons composants serait égale à i et fournie par la formule précédente, tandis que les Ouvrages de Physique, après M. Jamin, donnent pour la tangente du changement de phase,

$$\operatorname{tang} i = \frac{\varepsilon \sin\tau[\operatorname{tang}(\tau+\tau') + \operatorname{tang}(\tau-\tau')]}{1-\varepsilon^2 \sin^2\tau \operatorname{tang}(\tau+\tau')\operatorname{tang}(\tau-\tau')},$$

ε étant un très petit coefficient. Le Mémoire de Cauchy que je viens d'analyser a paru aussi littéralement dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de 1839; c'est donc bien cependant le Mémoire auquel M. Jamin dit avoir emprunté cette formule (*Annales de Chimie et de Physique*, 1850, t. XXIX, p. 286).

Dernier Mémoire, p. 288. — Il est intitulé : *Sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope*. Le titre du Mémoire indique peu le sujet qui s'y trouve traité. L'auteur se propose de déterminer l'action qui s'exerce entre deux molécules d'éther. Il est conduit à penser que cette action est répulsive et varie comme l'inverse du bicarré de la distance.

Il est bon de remarquer que cette loi n'est pas une conséquence nécessaire de ses formules. En effet, étant arrivé, page 304, à la formule

$$(37) \qquad \Omega^2 = \frac{4\pi\mathfrak{Q}}{3}\left[\frac{1}{k^2} r_\infty^2 f(r_\infty) - \frac{1}{10} r_0^4 f(r_0)\right],$$

où Ω désigne la vitesse de propagation des ondes planes, il dit :

« L'équation (37) fournit pour Ω^2 une valeur finie, positive et différente de zéro dans deux cas dignes de remarque, savoir :

» 1° Quand le produit $r^2 f(r)$ se réduit, pour une valeur infiniment grande de la distance r, à une constante finie, mais positive ;

» 2° Quand le produit $r^4 f(r)$ se réduit, pour une valeur infiniment petite de r, à une constante finie, mais négative. »

De ces deux cas, le plus vraisemblable est certainement le second, mais il y a une infinité de fonctions autres que $\frac{-h}{r^4}$ (h étant constant), qui satisfont à ce second cas. Il faut aussi noter que r_0 désigne la plus petite distance entre deux molécules et qu'on peut concevoir que le résultat soit très différent, suivant qu'on substitue dans $r_0^4 f(r_0)$ pour r_0 la valeur zéro ou cette plus courte distance ; il n'est pas prouvé, par exemple, qu'on ne puisse pas faire $f(r) = -\frac{h}{r^n}$, n étant > 4.

D'après la loi que Cauchy adopte pour l'action entre deux molécules d'éther, il trouve que la vitesse de propagation de l'onde à vibrations longitudinales serait infiniment grande par rapport à celle de l'onde à vibrations transversales. Enfin, il trouve que dans le vide la vitesse de propagation des rayons violets surpasserait celle des rayons rouges, en sorte que les rayons qui se propagent le plus rapidement dans les corps se propageraient au contraire moins rapidement dans le vide.

Le point de départ étant déjà très peu probable, un tel résultat doit porter à l'abandonner complétement.

Mais il me semble utile de faire quelques remarques au sujet même de cette recherche.

Sachant que deux corps célestes s'attirent, on ne peut guère admettre que cette action s'exerce autrement que par un corps intermédiaire ; cet objet intermédiaire ne peut être que l'éther, et sans savoir exactement comment se produit cette transmission de la force, on pourrait démontrer qu'elle doit avoir lieu en raison inverse du carré de la distance. C'est de même par l'intermédiaire de l'éther qu'il est naturel de se représenter les actions mutuelles des molécules d'électricité statique.

Mais s'il s'agit de deux molécules d'éther, je ne puis admettre qu'elles agissent l'une sur l'autre par un milieu intermédiaire : rien ne prouve qu'elles soient de forme sphérique ; j'ai à considérer leurs actions non à

des distances finies, mais à des distances infiniment petites; j'admets encore le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action, mais je ne vois nullement qu'il soit nécessaire que les deux molécules agissent l'une sur l'autre suivant une fonction de la distance, et, par exemple, l'action entre deux molécules d'électricité dynamique, bien qu'elle s'exerce à distance finie, dépend non seulement de leur distance, mais encore de leurs vitesses. Cependant, comme il serait peu philosophique d'affirmer *a priori* que cette action entre deux molécules d'éther n'est pas une simple fonction de leur distance, on peut essayer cette hypothèse, et, en l'appliquant aux cristaux à un et à deux axes optiques, on trouve précisément que cette hypothèse doit être rejetée.

En adoptant la théorie de l'élasticité, qui laisse cette action indéterminée, et supposant l'éther incompressible, on n'obtient plus dans un corps isotrope qu'une onde à vibrations transversales, et l'on n'est plus obligé de supposer, comme Cauchy, qu'il en existe une autre sur laquelle les vibrations sont longitudinales, et dont le mouvement de propagation est lié au mouvement de propagation de l'onde à vibrations transversales.

Le célèbre physicien Regnauld m'a dit avoir demandé plusieurs fois à Cauchy des formules relatives au mouvement de la lumière dans les cristaux transparents, résultant de ses théories et auxquelles on pût appliquer l'expérience, mais que Cauchy ne voulut jamais accéder à sa demande. On peut s'expliquer aisément ce refus, d'après les réflexions qui précèdent.

Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum;

PAR M. E. BRASSINNE.

« 1° La Dynamique s'enrichit, en 1755, d'une découverte importante et féconde en corollaires. Dans un petit Mémoire, intitulé *Specimen theoriæ turbinum*, Ségner observa que, si, après avoir imprimé à un corps de grandeur et de figure quelconques des mouvements de rotation en tous sens, on l'abandonne à lui-même, il aura toujours trois axes principaux de rotation.... La position de ces axes se détermine par une équation du troisième degré, dont les trois racines réelles répondent à chacun d'eux (BOSSUT, *Histoire des Mathématiques*).

On lit aussi dans la *Mécanique céleste*, Liv. XIV : « La découverte des axes principaux de rotation, due à Ségner, apporte des simplifications utiles. » Ajoutons que cette découverte, dont Euler ne fait pas mention, a été le point de départ de ses grands travaux, résumés dans son Ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum rigidorum*, 1765.

Pendant la rotation autour d'un axe principal, les forces centrifuges s'entre-détruisent, mais il existe aussi en chaque point d'un corps trois axes de rotation, sur lesquels les forces centrifuges développées exercent un effet maximum, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si en un point d'un corps on détermine les trois axes principaux, et si par chacun d'eux on mène un plan qui divise en parties égales l'angle des plans rectangulaires dont il est l'intersection, les trois*

perpendiculaires menées par le point donné aux plans bissecteurs seront les axes sur lesquels l'action des forces centrifuges sera un maximum.

Remarquons d'abord que, si l'on prend trois axes rectangulaires quelconques dont l'origine est un point du corps, et si on lui imprime une vitesse de rotation ω autour de la ligne des z, une particule dm, dont les coordonnées sont x, y, z et la distance à l'axe ρ, sera sollicitée par une force centrifuge $dm\rho\omega^2$, et, en supposant l'origine fixe, cette force agira sur un levier z, dont le moment sera $dm\rho z\omega^2$; elle aura deux composantes $dmx\omega^2$, $dmy\omega^2$ sur les plans zx, zy, qui agiront aussi sur un bras de levier z. Or, on peut remplacer tous les leviers sur le plan zx par un seul équivalent dont le bras, à partir de l'origine, sera l'unité et la force $\omega^2 \int xz\, dm$; sur le plan zy, le levier unique de même bras aura pour force $\omega^2 \int zy\, dm$. La somme des carrés des intégrales (en faisant ω égal à l'unité) sera le carré d'une résultante totale R agissant sur l'axe des z à une distance de l'origine égale à l'unité. Il est aisé de démontrer qu'en faisant tourner autour de l'origine le plan xOy, les nouvelles coordonnées x', y', introduites dans les intégrales, n'altéreront pas la somme et leurs carrés ou R^2.

2° Si l'on considère un système de droites passant par le point O d'un corps solide, et si l'on prend sur la première une longueur $On = \frac{1}{\sqrt{k}}$, sur la seconde une longueur $On' = \frac{1}{\sqrt{k'}}, \ldots$, k, k', k'', ... désignant les moments d'inertie du corps relatifs aux droites successives, le lieu des points n, n', n'', ... est la surface d'un ellipsoïde dont le centre est O et l'équation

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 - 2dYZ - 2eXZ - 2fXY = 1.$$

Les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$a = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad b = \int (x^2 + z^2)\, dm, \quad c = \int (x^2 + y^2)\, dm,$$
$$d = \int yz\, dm, \quad e = \int xz\, dm, \quad f = \int xy\, dm.$$

Ces coefficients varient avec la position des axes rectangulaires, mais l'équation (1) est toujours relative au même ellipsoïde, puisque les

rayons on, on', ..., déterminés par les valeurs des moments d'inertie relatifs à ces droites, ne dépendent pas de la position des axes x, y, z. Par une simple transformation des coordonnées, on ramène l'équation (1) à la forme

$$(2) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

dans laquelle les coefficients sont les moments d'inertie relatifs aux axes principaux. Par une transformation inverse, nous reviendrons de la forme (2), supposée connue, à la forme (1) avec ses trois rectangles. Nous ferons usage des formules d'Euler, dans lesquelles nous supposerons $\varphi = 0$ (*Mécanique céleste*, t. I, p. 73), savoir :

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\psi + y'\cos\theta\sin\psi + z'\sin\theta\sin\psi, \\ y &= -x'\sin\psi + y'\cos\theta\cos\psi + z'\sin\theta\cos\psi, \\ z &= -y'\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

Le plan x', y' fait un angle θ avec celui des xy, et sa trace sur ce dernier plan un angle ψ avec les x. La comparaison du résultat de la transformation avec l'équation (1) donne

$$\begin{aligned} -2\int x'z'\,dm &= 2(A-B)\sin\psi\cos\psi\sin\theta, \\ -2\int y'z'\,dm &= 2\sin\theta\cos\theta(A\sin^2\psi + B\cos^2\psi - C). \end{aligned}$$

La somme des carrés des intégrales exprimant la valeur de R^2, on aura

$$(3) \quad [(A-B)\sin 2\psi\sin\theta]^2 + \{\sin 2\theta[(A-B)\sin^2\psi + B - C]\}^2 = 4R^2.$$

Les deux conditions du maximum de R^2 sont

$$(4) \quad \begin{cases} \sin 2\theta\left\{\dfrac{(A-B)^2}{2}\sin^2 2\psi + 2\cos 2\theta[(A-B)\sin^2\psi + B - C]^2\right\} = 0, \\ \sin^2\theta\sin 2\psi\{2(A-B)^2\cos 2\psi + 4(A-B)\cos^2\theta[(A-B)\sin^2\psi + B - C]\} = 0. \end{cases}$$

Si l'on égalait à zéro les polynômes entre les grandes parenthèses, on trouverait, en éliminant θ, un résultat indépendant de ψ, savoir : $(B-C)(A-C) = 0$, qui indique l'incompatibilité des deux relations.

Mais on satisfait aux équations (4) de plusieurs manières; $\theta = 0$ ramène aux axes principaux

$$\theta = 90^\circ, \quad \psi = 45^\circ, \quad R = \frac{A - B}{2},$$

$$\theta = 45^\circ, \quad \psi = 90^\circ, \quad R = \frac{A - C}{2},$$

$$\theta = 45^\circ, \quad \psi = 0^\circ, \quad R = \frac{B - C}{2}.$$

Ces systèmes d'angles fixent la position de trois plans auxquels sont perpendiculaires les axes de rotation Oz', et l'on voit aisément que ces trois *axes centrifuges* sont perpendiculaires aux plans bissecteurs des angles plans rectangulaires formés par les axes principaux, ce qui démontre le théorème énoncé.

Dans le cas d'un solide de révolution, $A = B$, et les relations (4) sont satisfaites par la valeur $\theta = 45^\circ$, quel que soit l'angle ψ; par suite, les axes du maximum forment un cône droit dont les génératrices font avec l'axe 45°.

De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation ;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Les phénomènes de la réflexion de la lumière à la surface des corps diaphanes isotropes sont fournis avec une très grande approximation par la théorie de Fresnel ou celle de Neumann, qui conduisent à des formules identiques. D'après ces deux théories, il existe un angle d'incidence pour lequel la lumière naturelle est polarisée complètement, angle trouvé auparavant par Brewster au moyen de l'expérience. D'après les recherches de M. Jamin, il existe cependant très peu de substances diaphanes qui polarisent complètement la lumière par réflexion dans le plan d'incidence, ou, autrement dit, pour lesquelles un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence puisse disparaître extérieurement dans la réflexion sous une incidence convenable ; mais l'intensité du rayon réfléchi peut seulement être très petite. Il en résulte que, dans le voisinage de l'incidence calculée par la loi de Brewster, un rayon de lumière polarisé dans un azimut quelconque donne lieu à un rayon réfléchi polarisé elliptiquement, l'ellipse de vibration étant en général très allongée.

Cauchy a donné une théorie de ce phénomène, mais j'ai démontré, dans un Mémoire qui précède, que sa théorie n'est pas admissible.

Il serait bien peu philosophique de rejeter la théorie de Neumann, qui a tant de raisons pour elle et qui donne des résultats si approchés ;

mais il convient plutôt de chercher quelle petite perturbation modifie cette théorie. Cette perturbation provient d'une très petite perte de force vive qui se fait sur le plan réflecteur, en sorte que les rayons réfléchi et réfracté ne prennent pas toute la lumière qui sort du rayon incident.

Imaginons un rayon de lumière tombant sur un corps diaphane et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence; je démontre qu'à la rencontre du plan réflecteur il se fait en général dans les rayons réfléchi et réfracté un changement de phase par rapport au rayon incident. Quand l'incidence varie depuis zéro jusqu'à l'angle droit, ce changement de phase dans le rayon réfléchi varie depuis une fraction très petite de la demi-ondulation jusqu'à la demi-ondulation. Quand le rayon incident est au contraire polarisé dans le plan d'incidence, le changement de phase du rayon réfléchi reste toujours très petit. Si donc l'on suppose que l'on décompose un rayon polarisé dans un azimut quelconque en deux pareils rayons, la polarisation elliptique pour une incidence voisine de l'angle de Brewster dépendra surtout du changement de phase du premier rayon composant.

Je donne dans ce qui suit le moyen de calculer ce phénomène.

Rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

1. Supposons un rayon de lumière rencontrant un corps diaphane et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence. Les trois vibrations incidente, réfléchie et réfractée situées dans le plan réflecteur sont perpendiculaires au plan d'incidence et leurs vitesses peuvent être représentées respectivement par

$$\sin\frac{2\pi\tau}{\tau},\quad v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right),\quad u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right),$$

λ, λ' étant les longueurs d'ondulation dans le premier et dans le second milieu, t le temps, τ la durée de la vibration, α, β étant les changements de phase dans les rayons réfléchi et réfracté ; v, u sont regardés comme positifs.

Admettons qu'à la surface de séparation des deux milieux les deux

premières vitesses de vibration aient une somme égale à la troisième, et nous aurons

$$(1)\qquad \sin\frac{2\pi t}{\tau} + v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right) = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right).$$

Nous admettons avec Neumann que la densité de l'éther est la même dans les deux milieux et que l'élasticité est différente. D'après cela, si le principe de la conservation de la force vive a lieu, on obtient, par un calcul connu,

$$\sin i\cos i\left[\sin^2\frac{2\pi t}{\tau} - v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] = u^2\sin r\cos r\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right),$$

(Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur le calcul de cette équation.)

En divisant la seconde équation par la première, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin i\cos i\left[\sin\frac{2\pi t}{\tau} - v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] \\ &\qquad = u\sin r\cos r\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right). \end{aligned}\right.$$

Or, s'il n'y a pas d'angle de polarisation complète, c'est-à-dire si, le rayon incident étant polarisé comme nous l'avons dit, le rayon réfléchi ne peut disparaître complètement quelle que soit l'incidence, alors l'équation (1) étant admise, l'équation (2) est impossible. En effet, des équations (1) et (2) on tirerait

$$v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right) = \frac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)}\sin\frac{2\pi t}{\tau},$$

et, pour $i+r=\frac{\pi}{2}$, on aurait

$$v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right) = 0;$$

la vibration réfléchie serait donc nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équation (2) a été déduite comme conséquence du principe de la conservation de la force vive ; l'équation (2) n'étant donc plus possible rigoureusement, ce principe n'a plus lieu que d'une manière très approchée et les rayons réfléchi et réfracté ne prennent pas toute la force vive qui émane du rayon incident.

L'équation (2) n'étant plus exacte, nous devons la remplacer par la suivante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin i\cos i\left[\sin\frac{2\pi t}{\tau} - v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] \\ &\quad = u\sin r\cos r\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right) + \mathrm{B}\sin\frac{2\pi t}{\tau} + \mathrm{C}\cos\frac{2\pi t}{\tau}, \end{aligned}\right.$$

B, C étant des fonctions de i qui restent toujours très petites.

Remarquons que le mouvement vibratoire développé sur le plan réflecteur des forces élastiques tangentielles à ce plan et perpendiculaires au plan d'incidence. L'équation (2) exprimerait que les deux forces tangentielles développées par les mouvements incident et réfléchi ont une somme égale à la force développée par le mouvement réfracté. D'après l'équation (3) au contraire, l'égalité entre ces forces élastiques n'a plus lieu rigoureusement. Cette remarque n'étant pas indispensable pour le sujet qui nous occupe, je ne crois pas nécessaire de développer le calcul qui la démontre.

2. Les quantités u, v, α, β sont indépendantes de t, par conséquent les équations (1), (3) reviennent aux quatre suivantes

$$1 + v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$\sin i\cos i\left(1 - v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right) = u\sin r\cos r\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'} + \mathrm{B},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$-v\sin i\cos i\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = u\sin r\cos r\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'} + \mathrm{C}.$$

En résolvant ces quatre équations, on obtient d'abord

$$v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{\sin 2i - \sin 2r - 2B}{\sin 2i + \sin 2r},$$

$$u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{2\sin 2i - 2B}{\sin 2i + \sin 2r},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2C}{\sin 2i + \sin 2r},$$

$$u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{-2C}{\sin 2i + \sin 2r};$$

puis on en conclut

$$v^2 = \frac{(\sin 2i - \sin 2r - 2B)^2 + 4C^2}{(\sin 2i + \sin 2r)^2},$$

$$u^2 = \frac{4(\sin 2i - B)^2 + 4C^2}{(\sin 2i + \sin 2r)^2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2C}{\sin 2i - \sin 2r - 2B},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{-C}{\sin 2i - B}.$$

Le premier terme de v^2 s'annulera pour la valeur de i qui satisfait à l'équation

$$\sin 2i - \sin 2r - 2B = 0,$$

mais v ne s'annulera pas pour cette valeur de i.

5. Occupons-nous de la force vive absorbée.

Concevons que la lumière se propage par ondes planes, le mouvement vibratoire étant le même dans toute l'étendue d'une de ces ondes. Considérons un parallélépipède rectangle d'éther ayant une dimension AC dans la direction du rayon incident, une arête CD dans le plan d'incidence et la troisième perpendiculaire à ce plan; supposons que la première arête soit égale à $\frac{\lambda}{p}$, p étant un nombre entier et les deux autres égales à l'unité. Au bout d'un certain temps, le mouvement du parallélépipède ABCD se sera communiqué par réflexion au parallélépipède A′B′C′D′, et par réfraction au parallélépipède A″B″C″D″.

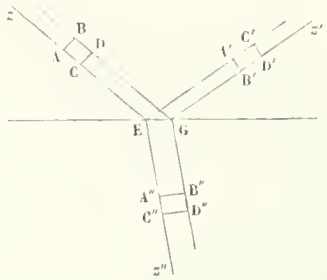
Soient

$$CE = z, \quad EA' = z', \quad EA'' = z'' = z'\frac{\lambda'}{\lambda},$$

$$AC = A'C' = \frac{\lambda}{p}, \quad A''C'' = \frac{\lambda'}{p}, \quad A''B'' = AB\frac{\cos r}{\cos i}.$$

Les vitesses vibratoires sur CD, C'D', C''D'' peuvent être représentées par

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right), \quad v\sin 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right), \quad u\sin 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right).$$



La densité de l'éther étant égale à ρ dans les deux milieux, on aura pour la variation de la force vive

$$\rho\int_{-z}^{\frac{\lambda}{p}+z} \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)dz - \rho v^2\int_{z'-\frac{\lambda}{p}}^{z'} \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right)dz'$$
$$- \rho u^2\int_{z''-\frac{\lambda'}{p}}^{z''} \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)dz''\frac{\cos r}{\cos i}.$$

En calculant ces intégrales, on obtient pour cette perte de force vive

$$\frac{\rho}{2}\left[\frac{\lambda}{p}(1 - v^2) - \frac{\lambda'}{p}u^2\frac{\cos r}{\cos i}\right]$$
$$- \frac{\rho}{8\pi}\sin\frac{4\pi}{p}\left[\lambda\cos 4\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)\right.$$
$$\left. - \lambda v^2\cos 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right) - \lambda u^2\frac{\cos r}{\cos i}\cos 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)\right]$$
$$+ \frac{\rho}{4\pi}\sin^2\frac{2\pi}{p}\left[\lambda\sin 4\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)\right.$$
$$\left. - \lambda v^2\sin 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right) - \lambda' u^2\frac{\cos r}{\cos i}\sin 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)\right].$$

Faisant p très grand et négligeant les termes multipliés par $\sin^2\frac{2\pi}{p}$, qui sont du second ordre par rapport à $\frac{1}{p}$, remarquant de plus que l'on peut faire $\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{p}=\frac{1}{p}$, on a pour l'expression précédente

$$\frac{\rho}{p}\Big[\lambda\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{z}{\lambda}\right)-\lambda v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau}+\frac{\alpha-z'}{\lambda}\right)$$
$$-\lambda' u^2\frac{\cos r}{\cos i}\sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau}+\frac{\beta-z''}{\lambda'}\right)\Big]$$

ou

$$\frac{\rho\lambda}{p}\Big[\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{z}{\lambda}\right)-v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau}+\frac{\alpha-z'}{\lambda}\right)$$
$$-u^2\frac{\sin r\cos r}{\sin i\cos i}\sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau}+\frac{\beta-z}{\lambda'}\right)\Big].$$

Or on a

$$\frac{t'-t}{\tau}=\frac{z'+z}{\lambda}$$

ou

$$\frac{t}{\tau}+\frac{z}{\lambda}=\frac{t'}{\tau}-\frac{z'}{\lambda};$$

donc, en prenant pour le temps une origine convenable, on a pour l'expression précédente

$$\frac{\rho\lambda}{p}\left[\sin^2\frac{2\pi t}{\tau}-v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)-u^2\frac{\sin r\cos r}{\sin i\cos i}\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\right].$$

Multiplions entre elles les équations (1) et (3), puis multiplions l'équation qui en résulte par $\frac{\rho\lambda}{p\sin i\cos i}$, nous aurons

$$\frac{\rho\lambda}{p}\left[\sin^2\frac{2\pi t}{\tau}-v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)-u^2\frac{\sin r\cos r}{\sin i\cos i}\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\right]$$
$$=\frac{\rho\lambda}{p}\frac{1}{\sin i\cos i}u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\left(\mathrm{B}\sin\frac{2\pi t}{\tau}+\mathrm{C}\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right);$$

le second membre représente donc la force vive perdue; on peut

l'écrire ainsi

$$\frac{\rho\lambda}{p\sin 2i}\Big[\mathrm{B}u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}+\mathrm{C}u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}$$
$$-\left(\mathrm{B}u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}-\mathrm{C}u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\right)\cos\frac{4\pi t}{\tau}$$
$$+\left(\mathrm{B}u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}+\mathrm{C}u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\right)\sin\frac{4\pi t}{\tau}\Big],$$

et, en remplaçant $u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}$, $u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}$ par les valeurs trouvées ci-dessus, on obtient

$$\frac{2\rho\lambda}{p\sin 2i(\sin 2i+\sin 2r)}\Big[\mathrm{B}\sin 2i-\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2$$
$$-(\mathrm{B}\sin 2i-\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)\cos\frac{4\pi t}{\tau}$$
$$+(\mathrm{C}\sin 2i-2\mathrm{BC})\sin\frac{4\pi t}{\tau}\Big].$$

Pour obtenir la perte de force vive éprouvée par absorption ou diffusion par un parallélépipède incident de longueur λ, il faut faire la somme de toutes les pertes éprouvées par les parallélépipèdes élémentaires qu'il renferme, et l'on a

$$(a)\qquad \frac{2\rho\lambda}{\sin 2i(\sin 2i+\sin 2r)}(\mathrm{B}\sin 2i-\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2),$$

quantité qui doit être essentiellement positive.

4. Quant à l'expression de la force vive perdue par le parallélépipède dont la longueur est $\frac{\lambda}{p'}$, il est facile de voir qu'elle peut être négative. On peut expliquer ce résultat en admettant qu'une partie de la force vive détournée d'un élément parallélépipédique puisse retourner à un élément suivant, de telle sorte que certains éléments peuvent gagner de la force vive au lieu d'en perdre. Mais il est évident que l'on doit trouver une quantité positive pour le changement de force vive éprouvée par tout le parallélépipède de longueur λ, changement qui s'effectue pendant la durée entière d'une vibration, temps plus petit que $\frac{1}{397}$ de trillionième de seconde.

Ainsi l'on a pour toute valeur de i

$$B \sin 2i - B^2 - C^2 > 0,$$

et par conséquent B est toujours positif. Pour $i = 0$ on aura

$$-B^2 - C^2 = 0 :$$

donc B, C sont nuls pour $i = 0$ et ils peuvent être considérés comme renfermant le facteur $\sin i$. Pour $i = \frac{\pi}{2}$, on a encore

$$-B^2 - C^2 = 0 :$$

donc B, C renferment le facteur $\cos i$, et l'on peut poser

$$B = k \sin 2i, \quad C = m \sin 2i,$$

k étant positif.

Remarquons que le numérateur de l'expression (a) renferme le facteur $\cos i$ au carré, et le dénominateur ne contient ce facteur qu'au premier degré; donc l'expression (a) est nulle pour $i = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'explique aisément, car le rayon réfracté disparaît et le rayon réfléchi provient de tout le rayon incident.

5. Ainsi on obtient pour les formules qui donnent les changements de phase α, β,

$$\tang \frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2m \sin 2i}{\sin 2i - \sin 2r - 2k \sin 2i},$$

$$\tang \frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{-m}{1-k}.$$

Si l'on change i en $-i$, r se change en $-r$ d'après la formule

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

où n est l'indice de réfraction; il est d'ailleurs évident que les expres-

sions de $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ et $\operatorname{tang}\frac{2\pi\beta}{\lambda}$ ne doivent pas changer; donc m et k sont des fonctions paires de i, s'ils ne sont pas constants.

m et k sont très petits, donc $\frac{\beta}{\lambda}$ est aussi très petit. La valeur de $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ sera elle-même très petite, excepté pour des valeurs de i voisines de celle qui satisfait à l'équation

$$\sin 2i - \sin 2r - 2k \sin 2i = 0;$$

elle deviendra infinie pour cette valeur de i et changera de signe quand i dépassera cette valeur; enfin elle deviendra nulle pour $i = \frac{\pi}{2}$. Donc, quand on fait varier i depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, α varie depuis une fraction très petite de $\frac{\lambda}{2}$ jusqu'à $\frac{\lambda}{2}$, et α subira la plus grande partie de cet accroissement pour les valeurs de i voisines de l'angle de polarisation. Les deux changements de phase α, β sont de même sens et, suivant que la quantité m sera positive ou négative, les deux changements de phase se feront dans un sens ou dans l'autre.

D'après les résultats de l'expérience, m tend en général vers zéro, quand l'indice de réfraction n tend vers $1,4$; il est ordinairement positif quand n est plus grand que $1,4$ et négatif quand n est plus petit. Toutefois m et k ne doivent pas dépendre seulement de l'indice de réfraction, ils doivent dépendre encore d'autre manière de la nature du milieu. En effet, si l'on suppose deux milieux identiques séparés par un plan, considéré comme le plan réflecteur, on devra, pour y appliquer les formules précédentes, faire

$$n = 1, \quad m = 0, \quad k = 0,$$

et non pas supposer m négatif.

Rayon polarisé dans le plan d'incidence.

6. Le phénomène des changements de phase a beaucoup moins d'intérêt lorsque le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence,

parce que ces changements restent toujours très petits, aussi bien dans le rayon réfléchi que dans le rayon réfracté.

Les vitesses des vibrations incidente, réfléchie et réfractée dans le voisinage du plan réflecteur peuvent être représentées par

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{z}{\lambda}\right),\quad v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha-z}{\lambda}\right),\quad u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta-z}{\lambda'}\right),$$

z, z', z'' étant nuls sur le plan réflecteur. En projetant pour $z=0$ les vitesses sur le plan réflecteur et sur la normale à ce plan et admettant que la troisième composante est égale à la somme des deux premières, on a les deux équations

$$(1)\qquad \left[\sin\frac{2\pi t}{\tau}-v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\cos i=u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\cos r,$$

$$(2)\qquad \left[\sin\frac{2\pi t}{\tau}+v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\sin i=u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\sin r.$$

En multipliant entre elles ces équations, on a

$$(3)\qquad \left[\sin^2\frac{2\pi t}{\tau}-v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\sin i\cos i=u^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\sin r\cos r,$$

l'équation de la conservation de la force vive.

Or il est aisé de reconnaître qu'on ne peut admettre les équations (1) et (2); car on en déduirait les quatre suivantes

$$\cos i\left(1-v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)=u\cos r\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$-v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\cos i=u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\cos r,$$

$$\sin i\left(1+v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)=u\sin r\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\sin i=u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\sin r,$$

et si α, β sont différents de zéro, en divisant la quatrième par la

deuxième, on a l'équation impossible

$$-\operatorname{tang} i = \operatorname{tang} r$$

Au reste, le principe de la conservation de la force vive n'étant plus entièrement exact, quand le rayon est perpendiculaire au plan d'incidence, on ne peut admettre qu'il ait lieu rigoureusement quand le rayon est situé dans ce plan. L'équation (3) n'a donc plus lieu; donc, si l'on admet l'équation (1), qui exprime l'égalité des composantes des vitesses des molécules d'éther, prises parallèlement au plan réflecteur, et infiniment près de part et d'autre de ce plan, on doit remplacer l'équation (2) par la suivante

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\sin\frac{2\pi t}{\tau} + v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\sin i = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\sin r \\ &\qquad + \mathrm{B}\sin\frac{2\pi t}{\tau} + \mathrm{C}\cos\frac{2\pi t}{\tau}, \end{aligned}\right.$$

où B, C sont de très petites quantités

7. Des équations (1) et (4) on tire les quatre suivantes

$$\cos i\left(1 - v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right) = u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\cos r,$$

$$-v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\cos i = u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\cos r,$$

$$\sin i\left(1 + v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right) = u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\sin r + \mathrm{B},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\sin i = u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\sin r + \mathrm{C},$$

desquelles on déduit

$$v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-\sin(i-r) + \mathrm{B}\cos r}{\sin(i+r)},$$

$$u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{(2\sin i - \mathrm{B})\cos i}{\sin(i+r)},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{\mathrm{C}\cos r}{\sin(i+r)},$$

$$u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = -\frac{\mathrm{C}\cos i}{\sin(i+r)}.$$

Enfin, on conclut de ces équations, en accentuant les lettres v, u, α, β, B, C pour distinguer le rayon situé dans le plan d'incidence du rayon perpendiculaire,

$$v'^2 = \frac{[\sin(i-r) - B'\cos i]^2 + C'^2\cos^2 r}{\sin^2(i+r)},$$

$$u'^2 = \frac{(2\sin i - B')^2\cos^2 i + C'^2\cos^2 i}{\sin^2(i+r)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \frac{-C'\cos r}{\sin(i-r) - B'\cos r},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\beta'}{\lambda'} = \frac{-C'}{2\sin i - B'}.$$

8. En raisonnant comme au n° **3**, on trouvera qu'un parallélépipede incident de longueur λ perdra dans le phénomène de la réflexion et de la réfraction une force vive égale à

$$\frac{\rho\lambda\cos r}{\sin(i+r)}\left(B' - \frac{B'^2 + C'^2}{2\sin i}\right).$$

Cette quantité étant toujours positive, nous aurons

$$2B'\sin i - B'^2 - C'^2 > 0;$$

donc B' est positif. Pour $i = 0$, nous aurons

$$B'^2 + C'^2 = 0;$$

par suite B', C' s'annulent pour $i = 0$ et peuvent être considérés comme renfermant le facteur $\sin i$. Lorsque i est égal à $\frac{\pi}{2}$, le rayon réfracté disparaît et le rayon réfléchi est simplement le prolongement du rayon incident; il est donc évident que α' est nul pour $i = \frac{\pi}{2}$, et C' renferme le facteur $\cos i$. Je puis, d'après cela, poser

$$C' = 2m'\sin i\cos i = m'\sin 2i.$$

D'autre part, la force vive perdue étant nulle dans ce cas extrême, on a

$$B' - \frac{B'^2 + C'^2}{2} = 0,$$

et, comme C' est alors nul, il reste

$$B'\left(1 - \frac{B'}{2}\right) = 0;$$

mais B' ne peut être que très petit : donc il est nul pour $i = \frac{\pi}{2}$, et il renferme le facteur $\cos i$. Ainsi on peut poser

$$B' = k' \sin 2i;$$

k', m' sont des fonctions paires de i, d'après ce qui a été dit (n° 5).

Quand un rayon de lumière est normal au plan réflecteur, tout plan passant par ce rayon peut être pris pour le plan d'incidence; il en résulte que pour $i = 0$ les formules qui donnent v', u', α', β' doivent être identiques à celles qui donnent v, u, α, β pour le rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

Faisons tendre i vers zéro, nous aurons

$$v^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{n} - 2k\right)^2 + 4m^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}, \quad u^2 = 4\,\frac{(1+k)^2 - m^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2},$$

et ensuite

$$v'^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{n} - 2k'\right)^2 + 4m'^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}, \quad u'^2 = 4\,\frac{(1+k')^2 - m'^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2};$$

en comparant ces formules, on obtient

$$k' = k, \quad m' = m \quad \text{pour} \quad i = 0.$$

Sur la différence entre les changements de phase qui s'opèrent dans les deux rayons principaux par la réflexion.

9. En désignant par α, α' les changements de phase opérés par la réflexion dans les rayons polarisés perpendiculairement et parallèlement au plan d'incidence, on a trouvé

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2m\sin 2i}{\sin 2i - \sin 2r - 2k\sin 2i},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \frac{-m'\sin 2i\cos r}{\sin(i-r) - k'\sin 2i\cos r},$$

m, m', k, k' étant des fonctions paires de i, qui satisfont aux conditions

$$m' = m, \quad k' = k, \quad \text{pour} \quad i = 0.$$

Les physiciens ont cherché à déterminer la quantité $\alpha' - \alpha$.

Pour déterminer sa valeur, il suffit de porter les deux expressions précédentes dans la formule

$$(a) \qquad \operatorname{tang}\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} - \operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}{1 + \operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}.$$

Pour $i = 0$, on a $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ et $\alpha' - \alpha = 0$. Faisons croître i, les quantités m, m' étant très petites, $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$ est toujours très petit et $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ le sera aussi tant que i différera sensiblement de l'angle de polarisation I; $\alpha' - \alpha$ restera très petit jusqu'à ce que i devienne voisin de I, puis il atteindra la valeur $\pm\frac{\lambda}{4}$ pour une valeur de i très-voisine de I, le signe $\pm$ ayant lieu suivant que m sera positif ou négatif. L'angle i continuant à croître, $\alpha' - \alpha$ s'approchera rapidement de $\pm\frac{\lambda}{2}$ et atteindra cette valeur pour $i = \frac{\pi}{2}$.

Pour simplifier, posons

$$\frac{2\pi(\alpha'-\alpha)}{\lambda} = \mathrm{J}, \quad \sin 2i - \sin 2r = j;$$

α' étant très petit, on pourra mettre l'équation (a) sous cette forme

$$\operatorname{tang} \mathrm{J} = -\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda} + \frac{\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}}{\cos^2\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}.$$

Si l'angle i est pris très voisin de I, on pourra remplacer $\cos^2\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ par $\cos^2\mathrm{J}$; cette équation pourra donc s'écrire

$$\frac{2m\sin 2i}{j-2k\sin 2i} + \frac{1}{\cos^2\mathrm{J}}\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \operatorname{tang}\mathrm{J},$$

et, en négligeant le produit $k\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$, on aura l'équation

$$(b) \qquad k + m\cot\mathrm{J} + \frac{j}{\sin 2i\sin 2\mathrm{J}}\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \frac{j}{2\sin 2i}.$$

Dans cette équation nous regarderons k, m, $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$ comme des inconnues, et les autres quantités comme des données de l'expérience.

Dans la théorie que j'ai exposée, k, m ne sont pas des constantes; mais, si l'on suppose trois expériences faites pour trois incidences très peu différentes, les quantités k, m, $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$ seront à peu près les mêmes pour les trois expériences et les trois équations (b) détermineront sensiblement leurs valeurs.

En prenant i suffisamment près de I, j deviendra très petit et le troi-

sième terme de (b) négligeable ; on aura donc l'équation

$$(c) \qquad k + m \cot J = \frac{j}{2 \sin 2 i},$$

et il suffira de deux expériences pour calculer m et k.

Si l'on prend pour unité l'intensité d'un rayon incident polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi qui en résulte sera

$$\rho^2 = \frac{[(1 - 2k)\sin 2i - \sin 2r]^2 + 4m^2 \sin^2 2i}{(\sin 2i + \sin 2r)^2};$$

la valeur de i qui satisfait à l'équation

$$(1 - 2k)\sin 2i - \sin 2r = 0$$

est

$$i = I - \frac{2kn^3}{n^4 - 1},$$

I étant l'angle qui satisfait à $\tang I = n$, et la valeur de ρ^2 correspondante sera

$$\rho^2 = \frac{4m^2 \sin^2 2i}{(\sin 2i + \sin 2r)^2}.$$

Applications numériques de cette théorie.

10. M. Jamin ayant soumis à l'expérience un verre dont l'indice de réfraction était

$$n = 1,487, \quad \text{ce qui donne} \quad I = 56^\circ 5'.$$

il a trouvé (*Annales de Chimie et de Physique*, 1850, t. XXIX, p. 299) : pour $i = 55^\circ 45'$,

$$J = 40^\circ 8';$$

pour $i = 56°$,

$$J = 75°36';$$

pour $i = 56°15'$,

$$J = 123°29'.$$

De ces trois résultats on déduit, au moyen de l'équation (c), les trois suivantes :

$$k + 1,1261\,m = 0,00338,$$
$$k + 0,2567\,m = 0,000808,$$
$$k - 0,6614\,m = -0,001786.$$

En résolvant les deux premières équations, on trouve

$$m = 0,002956, \quad k = 0,00005.$$

En résolvant la deuxième et la troisième, on a

$$m = 0,002825, \quad k = 0,000082.$$

Ces résultats sont très concordants; car, k étant très petit par rapport à m, l'erreur relative commise sur k peut être beaucoup plus grande.

Nous avons vu que, si m n'est pas constant, il est une fonction paire de i; si l'on pose $m = l \sin^2 i$, l étant constant, les phases α, α' sont alors nulles pour $i = 0$ et les trois équations ci-dessus deviennent

$$k + 0,8104\,l = 0,00338$$
$$k + 0,1765\,l = 0,000808,$$
$$k - 0,4573\,l = -0,001786.$$

Des deux premières on tire

$$l = 0,004054, \quad k = 0,00009;$$

et de la deuxième et la troisième

$$l = 0,004093, \quad k = 0,000086,$$

et ces résultats sont encore plus concordants.

M. Jamin ayant expérimenté de l'eau distillée dont l'indice de réfraction est

$$n = 1,333, \quad \text{ce qui donne} \quad I = 53^\circ 7',$$

il a trouvé (*Annales de Chimie et de Physique*, 1851, t. XXXI, p. 174) :
pour $i = 53^\circ 30'$,

$$J = -153^\circ 43';$$

pour $i = 53^\circ 15'$,

$$J = -126^\circ, 32';$$

pour $i = 52^\circ 55'$,

$$J = -45^\circ.$$

Des deux premières expériences on conclut

$$m = -0,001521, \quad k = 0,000083$$

et des deux dernières

$$m = -0,001516, \quad k = 0,000080,$$

ce qui est très concordant.

J'ai enfin obtenu pour le diamant

$$I = 67^\circ 40', \quad m = 0,0155, \quad k = 0,000260.$$

D'après la théorie, k doit être positif, ce qui s'accorde effectivement avec les calculs précédents; on voit ensuite que dans le verre, le diamant et l'eau, k est une quantité très petite en comparaison de m; on en doit conclure que la quantité de lumière perdue sur le plan réflecteur est très petite.

Je m'arrête aux applications qui précèdent et dans lesquelles je n'ai déterminé les deux quantités k et m que dans le voisinage de l'angle de polarisation. En effet, les déterminations numériques de ces quantités doivent être plutôt faites par les physiciens, qui peuvent seuls apprécier le degré de précision de leurs expériences et les multiplier à leur gré.

Sur quelques questions concernant les forces centrales;

PAR M. ÉDOUARD COMBESCURE.

On sait que Binet, dans une Note insérée au Tome II (1re série) de ce Journal, a considéré, au lieu des trois équations ordinaires relatives au mouvement produit par une force centrale, un système de n équations présentant la forme caractéristique des équations mentionnées. Bien que, en ce qui concerne l'intégration, la présence de n coordonnées n'introduise aucune difficulté nouvelle et qu'on puisse se ramener, si l'on veut, au cas de deux coordonnées rectangulaires seulement, il est difficile de méconnaître le caractère d'élégance et de symétrie qui règne dans l'analyse de l'éminent géomètre [1]. Cette circonstance m'avait engagé, dans le temps, à considérer un nombre quelconque de systèmes présentant isolément la composition des équations de Binet. Mais une modification plus essentielle consistait dans l'introduction d'une forme quadratique générale à la place du *rayon vecteur*. Je m'étais occupé, entre autres choses, de cette double généralisation, dans l'une de mes Thèses pour le doctorat, présentées en 1858 à la Faculté des Sciences de Paris. Cette Thèse n'ayant paru dans aucun Recueil périodique, il ne sera peut-être pas inutile d'en reproduire, avec quelques légères modifications, le premier paragraphe. Les paragraphes que

[1] J'hésite d'autant moins à conserver les n coordonnées, que les formules dont je fais usage ne sont généralement pas plus longues à écrire quand on laisse ce nombre n indéterminé.

j'ajoute ici se rapportent à des transformations dont quelques-unes m'étaient depuis longtemps connues et se présentaient assez naturellement. J'y joins ensuite les formules répondant au cas d'une résistance du milieu, formules dont je ne m'étais nullement occupé. Enfin j'applique la théorie à quelques exemples particuliers.

§ I. — *Sur un problème de M. Binet.*

Dans le Tome II du *Journal de Liouville*, M. Binet a donné une élégante extension analytique du problème relatif au mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale. La méthode de l'éminent géomètre peut être étendue, sous un certain point de vue, à un système d'équations de la forme du suivant :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{R}x, & \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1x_1, & \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \mathrm{R}_2x_2, & \ldots, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{R}y, & \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1y_1, & \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = \mathrm{R}_2y_2, & \ldots, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{R}z, & \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1z_1, & \dfrac{d^2z_2}{dt^2} = \mathrm{R}_2z_2, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}\right.$$

où le nombre des variables de $x_i, y_i, z_i, \ldots$ peut changer arbitrairement d'un groupe vertical à l'autre. Mais, au lieu de considérer le carré du *rayon vecteur* comme la somme des carrés des coordonnées correspondantes $x_i, y_i, z_i, \ldots$, je prendrai

$$\rho = \sqrt{\mathfrak{F}}, \quad \rho = \sqrt{\mathfrak{F}_1}, \quad \rho_2 = \sqrt{\mathfrak{F}_2}, \quad \ldots,$$

$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \ldots$ désignant des fonctions homogènes du second degré, de façon que

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F} = ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots + 2\mathrm{a}yz + 2\mathrm{b}xz + \ldots, \\ \mathfrak{F}_1 = a_1x_1^2 + b_1y_1^2 + c_1z_1^2 + \ldots + 2\mathrm{a}_1y_1z_1 + 2\mathrm{b}_1x_1z_1 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Cela étant, si l'on pose (les accents indiquant les dérivées par rap-

port à t)

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{f} = ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + \ldots + 2\mathrm{a}y'z' + 2\mathrm{b}x'z' + \ldots, \\ \mathrm{F} = axx' + byy' + czz' + \ldots + \mathrm{a}(yz' + zy') + \mathrm{b}(xz' + zx') + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

en différentiant deux fois de suite l'équation

$$\rho = \sqrt{\mathfrak{F}},$$

on aura

$$(4)\qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{axx'' + byy'' + \ldots + \mathrm{a}(yz'' + zy'') + \ldots}{\rho} + \frac{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}{\rho^3}.$$

Or, quelles que soient les quantités $x, y, \ldots, x', y', \ldots$, l'expression $\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2$ revient identiquement à une fonction homogène du second ordre des seuls binômes $(xy' - yx')$, $(zx' - xz')$, ..., lesquels, par une combinaison visible des équations (1), se réduisent séparément ici à des constantes. Donc, en chassant x'', y'', ... au moyen de ces mêmes équations (1), on aura la première du groupe suivant, les autres ayant une origine analogue,

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\rho + \dfrac{k^2}{\rho^3}, \\ \dfrac{d^2\rho_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1\rho_1 + \dfrac{k_1^2}{\rho_1^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

k, k_1, ... étant des constantes arbitraires.

Les deux premières équations (1) et (5) donnent

$$\rho\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{k^2x}{\rho^3},$$

d'où, en posant, d'après M. Binet,

$$dt = \frac{1}{k}\rho^2\,d\varphi,$$

et prenant $d\varphi$ constant, résulte

$$\frac{d^2\frac{x}{\rho}}{d\varphi^2} + \frac{x}{\rho} = 0.$$

On a donc

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{x}{\rho} = A\sin\varphi + A'\cos\varphi, & \frac{x_1}{\rho_1} = A_1\sin\varphi_1 + A'_1\cos\varphi_1, \quad \ldots, \\ \frac{y}{\rho} = B\sin\varphi + B'\cos\varphi, & \frac{y_1}{\rho_1} = B_1\sin\varphi_1 + B'_1\cos\varphi_1, \quad \ldots, \\ \frac{z}{\rho} = C\sin\varphi + C'\cos\varphi, & \frac{z_1}{\rho_1} = C_1\sin\varphi_1 + C'_1\cos\varphi_1, \quad \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad dt = \frac{\rho^2\,d\varphi}{k} = \frac{\rho_1^2\,d\varphi_1}{k_1} = \ldots.$$

Quant aux constantes A, A', ..., B, B', ..., elles doivent, dans chaque groupe vertical, vérifier trois relations telles que les suivantes, qui résultent de la reconstitution de ρ^2 ou $\mathcal{F}$ au moyen des expressions (6),

$$(8)\quad \mathcal{F}(A, B, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(A', B', \ldots) = 1, \quad F(A, A', B, B', \ldots) = 0,$$

les premiers membres désignant ce que deviennent $\mathcal{F}$, f, F quand x, y, z, ... sont remplacés par A, B, C, ..., et en même temps x', y', z', ... par A', B', C', ...

L'intégration du système complet (1) est ainsi ramenée à celle des équations (5) et (7).

§ II. — *Transformations particulières.*

Si dans la première équation (5) on remplace ρ^2 par $\mathcal{F}$, cette équation devient

$$(9)\qquad \mathcal{F}\frac{d^2\mathcal{F}}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{F}^2}{dt^2} - 2R\mathcal{F}^2 - 2k^2 = 0,$$

d'où, par la différentiation,

$$(10)\qquad \frac{d^3\bar{\xi}}{dt^3} - 4R\frac{d\bar{\xi}}{dt} - 2\frac{dR}{dt}\bar{\xi} = 0.$$

On arrive encore à cette dernière équation, en observant que les équations de définition (2) et (3) donnent tout de suite, en ayant égard à (1),

$$(f)\qquad \frac{d\bar{\xi}}{dt} = 2F,\quad \frac{df}{dt} = 2RF,\quad \frac{dF}{dt} = f + R\bar{\xi}.$$

En éliminant F et f, on retombe sur (10), dont (9) est une intégrale première.

On peut remarquer que l'élimination de R entre les deux dernières (f) fournit

$$2fF + \bar{\xi}\frac{df}{dt} - 2F\frac{dF}{dt} = 0,$$

ou, en vertu de la première,

$$f\frac{d\bar{\xi}}{dt} + \bar{\xi}\frac{df}{dt} - 2F\frac{dF}{dt} = 0,$$

ce qui redonne, par l'intégration,

$$\bar{\xi}f - F^2 = k^2.$$

A cause de

$$dt = \frac{\rho^2\,d\varphi}{k},$$

l'équation (5), en prenant $d\varphi$ constant, revient à

$$(11)\qquad -R = \frac{k^2}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right).$$

Soit actuellement

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots$$

une fonction linéaire homogène dont les coefficients sont des con-

stantes quelconques; on aura

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\xi,$$

et la combinaison de cette dernière équation avec (5) donnera, comme pour x,

$$\xi = m\rho \sin(\varphi + \varepsilon),$$

m et ε étant deux constantes arbitraires, vérifiant à cause des formules (6) les deux conditions

$$\Sigma A\alpha = m\cos\varepsilon, \quad \Sigma A'\alpha = m\sin\varepsilon.$$

En vertu de l'équation précédente, ces mêmes formules (6) pourront s'écrire

$$(6') \quad \begin{cases} x = \mathcal{A}\dfrac{\xi}{m} + \mathcal{A}'\sqrt{\mathcal{F} - \dfrac{\xi^2}{m^2}}, \\ y = \mathcal{B}\dfrac{\xi}{m} + \mathcal{B}'\sqrt{\mathcal{F} - \dfrac{\xi^2}{m^2}}, \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A\cos\varepsilon + A'\sin\varepsilon, & \mathcal{A}' &= -A\sin\varepsilon + A'\cos\varepsilon, \\ \mathcal{B} &= B\cos\varepsilon + B'\sin\varepsilon, & \mathcal{B}' &= -B\sin\varepsilon + B'\cos\varepsilon, \\ &\dots\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

les nouvelles constantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ... devant satisfaire aux conditions

$$\Sigma\mathcal{A}\alpha = m, \quad \Sigma\mathcal{A}'\alpha = 0,$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots) = 1, \quad \mathcal{F}(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \dots) = 1, \quad F(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}', \dots) = 0.$$

On s'assure d'ailleurs que l'équation (11) se transforme dans la suivante :

$$(12) \quad R = \frac{k^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{m^2\rho^2 - \xi^2}{\rho^2\left(\xi\dfrac{d\rho}{d\xi} - \rho\right)^2}\right] = \frac{2k^2}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{m^2\mathcal{F} - \xi^2}{\left(\xi\dfrac{d\mathcal{F}}{d\xi} - 2\mathcal{F}\right)^2}\right],$$

ou

$$(12_1) \quad R = \frac{m^2k^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\left(\xi\dfrac{d\rho_1}{d\xi} - \rho_1\right)^2}\right] = \frac{2m^2k^2}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\mathcal{F}_1}{\left(\xi\dfrac{d\mathcal{F}_1}{d\xi} - 2\mathcal{F}_1\right)^2}\right],$$

en posant

$$\mathcal{F} - \frac{\xi^2}{m^2} = \mathcal{F}_1 = \rho_1^2.$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, à cause de

$$m \sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{\xi}{\rho}, \quad \text{d'où} \quad m\rho^2 \cos(\varphi + \varepsilon)\frac{d\varphi}{d\xi} = \rho - \xi\frac{d\rho}{d\xi},$$

le second membre de l'équation (12) revient successivement à

$$\frac{k^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi^2}{d\varphi^2}\right) = \frac{k^2}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\frac{d}{\xi d\xi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\right) = \frac{k^2}{\xi\rho^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\right);$$

en substituant au dernier membre, au lieu de $\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}$, l'expression équivalente

$$\frac{m}{\rho}\cos(\varphi + \varepsilon) - m\sin(\varphi + \varepsilon)\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi},$$

on retombe sur l'équation (11).

On remarquera qu'en posant

$$m\rho = \xi\sqrt{1 + v^2},$$

d'où résulte

$$v = \cot(\varphi + \varepsilon),$$

la formule (12) peut encore s'écrire

$$R = \frac{k^2 m^4}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\frac{1}{\xi}}{dv}\right)^2 = \frac{k^2 m^4}{\xi}\frac{d\frac{1}{\xi}}{dv}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\frac{1}{\xi}}{dv}\right),$$

c'est-à-dire

$$(12_2) \qquad R = -\frac{k^2 m^4}{\xi^3}\frac{d^2\frac{1}{\xi}}{dv^2}.$$

Suivant qu'on emploiera les coordonnées ρ et φ ou ρ et ξ, ou enfin v

et ξ, il faudra joindre à (11) ou à (12), ou enfin à (12_2), l'une des équations suivantes, dont le premier membre est toujours $k\,dt$, savoir :

$$(13)\qquad k\,dt = \rho^2\,d\varphi = \frac{\bar{\mathcal{F}}\,d\xi - \frac{1}{2}\xi\,d\bar{\mathcal{F}}}{\sqrt{m^2\bar{\mathcal{F}} - \xi^2}} = -\frac{\xi^2}{m^2}\,d\upsilon.$$

Il est presque superflu de faire observer, que dans les groupes (1), les quantités R, R_1, ... désignent des fonctions tout à fait quelconques connues ou inconnues, et que si l'on voulait faire rentrer le premier de ces groupes, par exemple, dans le type caractéristique pour les forces centrales, il suffirait d'écrire

$$R = \frac{\mathcal{R}}{r},$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots},$$

$\mathcal{R}$ étant censé représenter la force centrale proprement dite.

§ III. — *Relations entre les diverses constantes et les valeurs initiales des variables et de leurs dérivées premières.*

Lorsqu'on adopte les coordonnées ρ et φ, les coefficients qui figurent dans ρ sont censés généralement des constantes données. La constante arbitraire k, qui correspond à la constante *principale* des aires, est définie en fonction des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots$ répondant à $t = 0$ par la relation

$$k^2 = \bar{\mathcal{F}}(x_0, y_0, \ldots)\bar{\mathcal{F}}(x'_0, y'_0, \ldots) - F(x_0, x'_0, \ldots)^2.$$

Les relations (6) et leurs différentielles premières donnent ensuite

$$\begin{aligned} A &= Mx_0 + M'x'_0, & B &= My_0 + M'y'_0, \\ A' &= Nx_0 + N'x'_0, & B' &= Ny_0 + N'y'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

en posant

$$M = \frac{\sin\varphi_0}{\rho_0} - \frac{\rho'_0}{k}\cos\varphi_0, \quad M' = \frac{\rho_0}{k}\cos\varphi_0,$$

$$N = \frac{\cos\varphi_0}{\rho_0} + \frac{\rho'_0}{k}\sin\varphi_0, \quad N' = -\frac{\rho_0}{k}\sin\varphi_0,$$

et il faut observer que

$$\rho_0\rho'_0 = F(x_0, x'_0, \ldots).$$

Il est facile de reconnaître que, avec ces expressions des constantes, les trois conditions

$$\mathcal{F}(A, B, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(A', B', \ldots) = 1, \quad F(A, A', B, B', \ldots) = 0$$

sont identiquement satisfaites. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(A, B, \ldots) &= M^2\mathcal{F}(x_0, \ldots) + 2MM'F(x_0, x'_0, \ldots) + M'^2\mathcal{F}(x'_0, \ldots),\\
\mathcal{F}(A', B', \ldots) &= N^2\mathcal{F}(x_0, \ldots) + 2NN'F(x_0, x'_0, \ldots) + N'^2\mathcal{F}(x'_0, \ldots),\\
F(A, A', \ldots) &= MN\mathcal{F}(x_0, \ldots) + (MN' + NM')F(x_0, x'_0, \ldots) + M'N'\mathcal{F}(x'_0, \ldots),
\end{aligned}$$

et il suffit de substituer aux seconds membres les expressions précédentes de M, M', N, N' pour constater que ces seconds membres se réduisent respectivement à 1, 1, 0, en vertu de l'expression k^2 écrite un peu plus haut. Quant à la constante arbitraire φ_0, quand on aura intégré l'équation (12) jointe à (13), ou cette dernière équation jointe à (15), les trois constantes introduites par cette intégration se détermineront en fonctions de ρ_0, ρ'_0, φ_0, mais cette dernière quantité restera tout à fait arbitraire; on peut la considérer comme un paramètre de constitution propre au système des coordonnées ρ et φ, et lui donner telle valeur déterminée qu'on voudra.

Si l'on fait usage des coordonnées ρ et ξ, les valeurs des constantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ... sont

$$\mathcal{A} = \frac{1}{k}\sqrt{\rho_0^2 - \frac{\xi_0^2}{m^2}}\,x'_0 - \frac{1}{k}\frac{\rho_0\rho'_0 - \frac{\xi_0\xi'_0}{m^2}}{\sqrt{\rho_0^2 - \frac{\xi_0^2}{m^2}}}\,x_0,$$

$$\mathcal{A}' = -\frac{1}{k}\frac{\xi_0}{m}x'_0 + \frac{1}{k}\frac{\xi'_0}{m}x_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la constante k ayant la valeur déterminée ci-dessus. On reconnaît que ces expressions rendent identiques les deux relations

$$\Sigma \lambda \alpha = m, \quad \Sigma \lambda' \alpha = 0.$$

Elles rendent aussi identiques, d'après ce qui précède, les trois autres équations de condition. Cette même constante k peut aussi se déterminer au moyen de l'équation

$$k = \frac{\rho^2 \frac{\xi'}{m} - \rho\rho' \frac{\xi}{m}}{\sqrt{\rho^2 - \frac{\xi^2}{m^2}}},$$

où l'on mettra pour $x, y, \ldots, x', y', \ldots$ leurs valeurs initiales, en prenant encore

$$\rho_0 \rho'_0 = F(x_0, x'_0, \ldots).$$

L'équation précédente, où ρ et ξ restent quelconques, servira avec (12) à déterminer ρ et $\frac{\xi}{m}$ en fonction du temps : les constantes introduites s'exprimeront au moyen de ρ_0, ρ'_0, $\frac{\xi_0}{m}$, $\frac{\xi'_0}{m}$, en sorte que m restera indéterminé et pourra recevoir la valeur particulière qu'on voudra.

Quand on ne veut pas faire figurer les valeurs initiales de $x, y, \ldots, x', y', \ldots$, il y a lieu d'examiner, suivant les cas, quelles sont les constantes, tant A, A', ... que celles qui entrent dans ξ, dans $\mathfrak{F}$ et dans les intégrales définitives, qui restent vraiment arbitraires et celles qui sont des constantes de *constitution*. L'exemple suivant mettra en évidence le sens précis de cette remarque, sans qu'il soit nécessaire d'y insister.

Il est presque superflu d'introduire ici la remarque générale, à savoir que la coordonnée ρ n'est autre chose que le paramètre de similitude de formes quadratiques homothétiques, et ξ le paramètre analogue pour les formes linéaires.

§ IV. — *Mouvement suivant une conique.*

Une conique à n coordonnées x, y, z, ... peut être ici définie par l'équation

$$(i) \qquad \mathfrak{F} = 2\xi + h,$$

où h est une constante. En différentiant cette équation et ayant égard à

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{R}\xi,$$

on aura successivement

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = 2\mathrm{R}\xi, \quad \frac{d^3\mathfrak{F}}{dt^3} = 2\mathrm{R}\frac{d\xi}{dt} + 2\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt},$$

et l'équation (10), § II, deviendra

$$3\mathrm{R}\frac{d\xi}{dt} + (\xi + h)\frac{d\mathrm{R}}{dt} = 0.$$

On en tire

$$(g) \qquad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{G}}{(\xi + h)^3},$$

G étant une constante arbitraire. Cette expression, sauf la présence ici de n coordonnées, est précisément celle trouvée par M. Yvon Villarceau (*Connaissance des Temps* pour 1852), et l'on peut regarder l'équation

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathrm{G}r}{(\xi + h)^3}$$

comme définissant, au point de vue dynamique, la force centrale la plus générale propre à faire décrire librement une conique à un point matériel.

Les expressions (i), (g) de $\mathfrak{F}$ et de R, substituées dans (9), fournissent ensuite, entre ξ et t, la relation au moyen de laquelle s'achève la solution.

Si l'on veut faire usage de l'équation (12), en introduisant dans cette équation l'expression (*i*) de $\vec{x}^2$, on obtient

$$(g_1) \qquad R = -\frac{k^2(m^2+h)}{(\xi+h)^3}.$$

On déduit ensuite de la seconde (13)

$$k\,dt = \frac{(\xi+h)\,d\xi}{\pm\sqrt{m^2h+2m^2\xi-\xi^2}},$$

et, en posant

$$\xi = m^2 + m\sqrt{m^2+h}\cos\varpi, \qquad \frac{k}{m^2+h} = n, \qquad \frac{m}{\sqrt{m^2+h}} = e,$$

il en résulte, en ayant égard à (6') et désignant par τ une constante arbitraire,

$$(a) \qquad \begin{cases} nt+\tau = \varpi + e\sin\varpi, \\ x = a(e+\cos\varpi) + a'\sin\varpi, \\ y = b(e+\cos\varpi) + b'\sin\varpi, \\ z = c(e+\cos\varpi) + c'\sin\varpi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

les nouvelles quantités a, a', ... qui sont mises à la place de $\alpha\sqrt{m^2+h}$, $\alpha'\sqrt{m^2+h}$, ... devant satisfaire aux deux relations

$$\Sigma a\alpha = m\sqrt{m^2+h}, \qquad \Sigma a'\alpha = 0.$$

En faisant

$$-k^2(m^2+h) = \mu,$$

et regardant α, β, ..., h, μ comme des quantités données, les expressions ci-dessus renferment le nombre $2n$ de constantes arbitraires exigé par l'intégration. On remarquera que l'équation (g_1) peut encore s'écrire

$$(g') \qquad R = -\frac{n^2}{(1+e\cos\varpi)^3}, \quad \text{ou bien} \quad R = -\frac{1}{n}\frac{d\varpi^3}{dt^3}.$$

Je suppose inversement qu'on se donne l'expression

$$R = \frac{gk^2}{(\xi+h)^3},$$

où $gk^2 = \mu$. La formule (12), en faisant $\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - \frac{\xi^2}{m^2}}$, fournit par première intégration

$$\xi \frac{d\rho_1}{d\xi} - \rho_1 = \frac{m(\xi + h)}{\sqrt{-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh}};$$

d'où

$$\rho_1 = c'\xi + m\frac{\sqrt{-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh}}{g + ch},$$

c et c' étant deux constantes arbitraires. Si l'on introduit cette valeur de ρ_1 dans les équations (6'), on obtient, en écrivant λ au lieu de $\lambda + mc'\lambda'$,

$$x = \lambda\frac{\xi}{m} + \lambda'\frac{m}{g + ch}\sqrt{-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh},$$

et l'on a les deux conditions

$$\Sigma\lambda\alpha = m, \quad \Sigma\lambda'\alpha = 0,$$

ce qui réduit à $2n - 1$, comme cela doit être, le nombre des arbitraires, c compris, qui figurent dans ces n équations. Par la substitution

$$\xi + h = -\frac{g}{c} + \sqrt{\frac{g}{c}\left(h + \frac{g}{c}\right)}\cos\omega,$$

qui réduit le radical ci-dessus à $\sqrt{g\left(h + \frac{g}{c}\right)}\sin\omega$, et en tenant compte de la seconde (13), on se ramène aux formes (a). Il faut observer qu'en adoptant directement les expressions précédentes de $x, y, \ldots$, qui définissent une conique, et se rappelant que

$$\mathcal{F}(\lambda, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(\lambda', \ldots) = 1, \quad F(\lambda, \lambda', \ldots) = 0,$$

on aura

$$\mathcal{F}(x, y, \ldots) = \frac{\xi^2}{m^2} + \frac{m^2}{(g + ch)^2}\left[-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh\right],$$

ce qui revient à dire que, dans l'expression ci-dessus de ρ_1, c' peut être supposé égal à zéro.

Cette expression de ρ_1 doit être modifiée lorsqu'on suppose $g + ch$ égal à zéro. L'équation différentielle qui précède l'expression dont il s'agit devient alors

$$\xi \frac{d\rho_1}{d\xi} - \rho_1 = \frac{m(\xi + h)}{\sqrt{-c}\,\xi}.$$

On en tire

$$\rho_1 = c'\xi - \frac{m}{\sqrt{-c}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{\xi}\right),$$

et l'on peut prendre, par suite,

$$x = \mathcal{A}\frac{\xi}{m} + \mathcal{A}'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{\xi}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

avec les conditions

$$\Sigma \mathcal{A}\alpha = m, \quad \Sigma \mathcal{A}'\alpha = 0.$$

Sans se préoccuper de la coordonnée ρ_1, on reconnait que ces expressions satisfont à

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{R}x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{R}y, \quad \dots,$$

pourvu que l'on détermine ξ en fonction de t, par l'équation du premier ordre

$$\frac{d\xi^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{R}}{h}\left(1 + \frac{h}{\xi}\right),$$

où, bien entendu,

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{(\xi + h)^3};$$

mais on voit que les expressions intégrales qui précèdent ne renferment que $2n - 2$ constantes arbitraires, en sorte qu'on n'obtient qu'une solution particulière de la question.

La formule (12) devient illusoire lorsqu'on suppose

$$\xi \frac{d\rho}{d\xi} - \rho = -h,$$

h étant une constante quelconque, c'est-à-dire lorsque

$$\rho = c\xi + h,$$

ou, ce qui revient au même, en excluant le cas de ρ constant quand

$$\mathcal{F} = \rho^2 = (\xi + h)^2.$$

L'équation (9) fournit alors, en ayant encore égard à $\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\xi$,

$$(g_2) \qquad -R = \frac{\left(\frac{k^2}{h}\right)}{(\xi + h)^3} = \frac{\left(\frac{k^2}{h}\right)}{\rho^3}.$$

L'équation (11), qui est seulement en défaut dans le cas, qu'on peut exclure, où φ serait constant, donne, par suite,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h} + c\sin\varphi + c'\cos\varphi,$$

c et c' étant des constantes arbitraires. On a, par conséquent, d'après les formules (6),

$$x = \frac{A\sin\varphi + A'\cos\varphi}{\frac{1}{h} + c\sin\varphi + c'\cos\varphi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui définit une conique. Il entre dans ces expressions de $x, y, \ldots$ les $2n$ constantes arbitraires $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \ldots$ et les trois $\frac{1}{h}$, c, c'; mais il n'y a visiblement que $2n + 2$ constantes indépendantes, et à cause de

$$\mathcal{F}(A, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(A', \ldots) = 1, \quad F(A, A', \ldots) = 0,$$

ce nombre est réduit au nombre voulu $2n - 1$.

En posant

$$\frac{1}{h} + g\cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{1}{h} + c\sin\varphi + c'\cos\varphi,$$

et faisant usage de la substitution comme

$$\cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{\cos w - gh}{1 - gh\cos w},$$

on aura

$$\rho = \frac{h}{1 - g^2 h^2}(1 - gh\cos w),$$

et l'on fera rentrer les expressions précédentes dans la forme (a), y compris l'équation déduite de $\rho^2\, d\varphi = k\, dt$.

Comme l'équation écrite un peu plus haut, entre ρ et φ, peut se mettre sous la forme

$$h = \rho + \rho gh\cos(\varphi + \varepsilon),$$

et qu'on n'altère pas la forme des équations (6) pas plus que les trois conditions

$$\mathfrak{F}(A, \ldots) = 1, \quad \mathfrak{F}(A', \ldots) = 1, \quad F(A, A', \ldots) = 0,$$

en donnant à ε la valeur qu'on voudra, on peut poser

$$gh\cos(\varphi + \varepsilon) = -\xi,$$

et l'on est ramené à l'équation

$$\rho = \xi + h,$$

d'où l'on peut conclure qu'il n'y a pas d'autre forme que l'une ou l'autre des expressions (g_2) donnant à R la composition analytique requise en ce qui concerne l'intégration, résultat que M. Darboux a établi par d'autres considérations, en faisant connaître en même temps la seconde forme (g_2) de R (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, avril 1877).

Revenant à la théorie générale, il est à peine nécessaire de signaler trois cas où le problème d'intégration se résout immédiatement par des quadratures :

1° Celui où, dans la formule (11), on suppose

$$R = f(\rho);$$

2° Celui où, dans la même formule, on prend

$$R = \frac{f(\varphi)}{\rho^3} + \frac{f_1(\varphi)}{\rho^4};$$

3° Enfin celui où, dans la formule (12) ou (12₁), on suppose

$$R = f(\xi).$$

J'ajouterai, pour le cas le plus important de deux coordonnées rectangulaires x, y, les relations qui ont lieu entre les diverses constantes, quand on fait usage simultanément des coordonnées ρ et ξ, auxquelles on fait correspondre les formules (6'). On a, dans ce cas,

$$\rho^2 = ax^2 + by^2 + 2cxy, \quad \xi = \alpha x + \beta y,$$

avec les cinq conditions

$$\begin{aligned} a\mathfrak{a}^2 + b\mathfrak{b}^2 + 2c\mathfrak{a}\mathfrak{b} &= 1, \\ a\mathfrak{a}'^2 + b\mathfrak{b}'^2 + 2c\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' &= 1, \\ a\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + b\mathfrak{b}\mathfrak{b}' + c(\mathfrak{a}\mathfrak{b}' + \mathfrak{b}\mathfrak{a}') &= 0, \\ \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta &= m, \\ \mathfrak{a}'\alpha + \mathfrak{b}'\beta &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par k' la constante des aires, telle que généralement

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = k',$$

on a ici

$$k^2 = (ab - c^2)(yx' - xy')^2,$$

en sorte que, en donnant à k et k' le signe qu'on jugera à propos, on aura

$$k = k'\sqrt{ab - c^2},$$

$$k' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}\mathfrak{a}' = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}},$$

et l'on pourra particulièrement écrire, sous les deux formes suivantes,

le groupe des cinq relations ci-dessus

$$\left\{\begin{aligned}
&m^2 = k'^2(b\alpha^2 + a\beta^2 - 2c\alpha\beta),\\
&\mathfrak{a} = \frac{k'^2}{m}(b\alpha - c\beta), \quad \mathfrak{b} = \frac{k'^2}{m}(a\beta - c\alpha),\\
&\mathfrak{a}' = -\frac{k'}{m}\beta, \quad \mathfrak{b}' = \frac{k'}{m}\alpha,\\
&a = \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}'^2}{k'^2}, \quad b = \frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}'^2}{k'^2}, \quad c = -\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{b}}{k'^2},\\
&\alpha = \frac{m}{k'}\mathfrak{b}', \quad \beta = -\frac{m}{k'}\mathfrak{a}'.
\end{aligned}\right.$$

§ V. — *Mouvement dans un milieu résistant.*

Je suppose qu'au lieu des équations (1) on considère les suivantes :

$$(1') \quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} = Rx + Vx', \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = R_1x_1 + V_1x_1', \quad \ldots,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} = Ry + Vy', \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = R_1y_1 + V_1y_1', \quad \ldots,\\
&\frac{d^2z}{dt^2} = Rz + Vz', \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = R_1z_1 + V_1z_1', \quad \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots
\end{aligned}\right.$$

où jusqu'ici $R, R_1, \ldots, V, V_1, \ldots$ sont des quantités tout à fait quelconques pouvant dépendre, quand elles sont données, de toutes les variables $x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$ de leurs dérivées premières $x', y', \ldots, x_1', y_1', \ldots$ et de la variable indépendante t. En introduisant une fonction auxiliaire T, telle que

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = V,$$

l'élimination de R entre les deux premières (1'), par exemple, donnera

$$\frac{xy' - yx'}{T} = \text{const.};$$

l'expression $\bar{x}f - F^2$, qui figure dans le dernier terme de l'équation (4),

§ 1, deviendra donc ici égale à k^2T^2, en désignant par k^2 une constante arbitraire. Cette équation (4) deviendra, par conséquent, en ayant égard à (1'),

$$(4') \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} = R\rho + V\frac{d\rho}{dt} + \frac{k^2T^2}{\rho^3}.$$

Soit encore

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots,$$

en sorte que

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\xi + \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\frac{d\xi}{dt}.$$

Si l'on fait

$$\frac{d\xi}{dt} = kT\sqrt{\varpi},$$

cette équation pourra s'écrire

$$\frac{kT}{2\sqrt{\varpi}}\frac{d\varpi}{dt} = R\xi,$$

et l'on aura, par suite,

$$R = \frac{k^2T^2}{2\xi}\frac{d\varpi}{d\xi}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{d\rho}{dt} = kT\sqrt{\varpi}\frac{d\rho}{d\xi}, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = k^2T^2\varpi\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + \frac{d\rho}{d\xi}\left(\frac{k^2}{2}T^2\frac{d\varpi}{d\xi} + k\sqrt{\varpi}\frac{dT}{dt}\right),$$

ce qui transforme l'équation (4') dans la suivante :

$$\varpi\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\xi} - \frac{\rho}{\xi}\right)\frac{d\varpi}{d\xi} - \frac{1}{\rho^3} = 0.$$

On tire de là, par l'intégration,

$$\varpi = \left(m^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\left(\xi\frac{d\rho}{d\xi} - \rho\right)^{-2},$$

m étant une constante arbitraire, et, par conséquent,

$$(12') \qquad R = \frac{k^2T^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\left(m^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2}\right)}{\left(\xi\frac{d\rho}{d\xi} - \rho\right)^2}\right].$$

Si l'on fait, ε étant une constante quelconque,

$$\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{\xi}{m\rho},$$

cette équation deviendra

$$(11') \qquad -R = \frac{k^2 T^2}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right),$$

et l'on aura en même temps

$$(13') \qquad kT\,dt = \frac{\rho\,d\xi - \xi\,d\rho}{\sqrt{m^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2}}} = \rho^2\,d\varphi.$$

A cela il faut joindre

$$(14) \qquad \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = V \quad \text{ou} \quad k\sqrt{\varpi}\frac{dT}{d\xi} = V \quad \text{ou encore} \quad k\frac{dT}{d\varphi} = \rho^2 V,$$

et l'on a toujours les équations (6) ou (6') avec les relations des constantes

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{A}, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(\mathcal{A}', \ldots) = 1, \quad F(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \ldots) = 0, \\ \Sigma \mathcal{A}\alpha = m, \quad \Sigma \mathcal{A}'\alpha = 0. \end{cases}$$

On observera qu'en posant

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + \ldots$$

il faudrait écrire

$$V = \frac{U}{v},$$

si l'on voulait faire figurer dans le calcul la résistance proprement dite U.

Dans le cas où cette résistance U est proportionnelle à la simple vitesse v, V est égal à la constante $-n'$, de sorte que, d'après (14),

$$T = e^{-n't},$$

et, par suite,

$$-R = \frac{k^2 e^{-2n't}}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right).$$

De là résulte que, si une force $\mathcal{R}_0$ fait décrire dans le vide une certaine courbe, la force $e^{-2n't}\mathcal{R}_0$ fera décrire la même courbe avec la loi de résistance supposée, en choisissant convenablement les circonstances initiales, seulement le mouvement angulaire sera changé. Ainsi, pour les coniques précédemment considérées, la force $e^{-2n't}\frac{\mu r}{\rho^3}$ fera décrire librement ces coniques, comme s'il n'y avait pas de résistance de milieu; mais il faudra, dans la première formule (a), § IV, écrire $-\frac{1}{n'}e^{-n't}$ au lieu de t, ce qui altérera le mouvement angulaire.

De même que la racine carrée de la forme quadratique joue le rôle de *rayon vecteur*, il est naturel, en suivant l'analogie, de faire jouer le rôle de *vitesse* à la racine carrée de la fonction $\mathcal{F}(x', y', \ldots)$, désignée par f au § I. En posant, pour un moment,

$$\xi = m\rho\sin(\varphi + \varepsilon), \quad \eta = m\rho\cos(\varphi + \varepsilon),$$

m et ε étant des constantes, on a, d'après les formules (G') du § II,

$$x' = \lambda\frac{\xi'}{m} + \lambda'\frac{\eta'}{m},$$

d'où, à cause des relations (15), résulte

$$\frac{\mathcal{F}}{k^2}\mathcal{F}(x', y', \ldots) = \frac{\xi'^2}{m^2} + \frac{\eta'^2}{m^2},$$

ou

$$\mathrm{f} = \rho'^2 + \rho^2\varphi'^2.$$

On a aussi, par les mêmes formules,

$$\mathrm{F} = \rho\rho',$$

et, en remettant $\mathcal{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2$ au lieu de $k^2\mathrm{T}^2$, on peut écrire, si l'on veut, l'équation (11') sous la forme

$$(11'') \qquad -\mathrm{R} = \rho\varphi'^2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right).$$

§ VI. — *Autre choix de variables.*

D'après les équations qui définissent $\mathfrak{F}$, f, F au début du § I, et en ayant égard aux équations (1′) du précédent paragraphe, on reconnaît tout de suite que

$$(a)\quad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2\mathrm{F},\quad \frac{d\mathrm{f}}{dt} = 2\mathrm{RF} + 2\mathrm{Vf},\quad \frac{d\mathrm{F}}{dt} = \mathrm{f} + \mathrm{R}\mathfrak{F} + \mathrm{VF},\quad \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \mathrm{V},$$

où j'ai rapproché la quatrième équation. En éliminant R entre les deux premières, il vient

$$\mathfrak{F}\frac{d\mathrm{f}}{dt} - 2\mathrm{F}\frac{d\mathrm{F}}{dt} + 2\mathrm{fF} = \frac{2}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}(\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2),$$

et, en mettant $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ au lieu de 2F au troisième terme du premier membre, on retrouve la relation

$$\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2 = k^2\mathrm{T}^2,$$

qui peut être regardée comme une intégrale première des équations (a).

On aurait des équations analogues pour le second groupe (1′), etc. Dans la question générale d'intégration de l'ensemble des groupes (1′), les quantités $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots$ sont censées des fonctions données de toutes les variables $t, x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$ et de leurs premières dérivées $x', y', \ldots, x'_1, y'_1, \ldots$. Au moyen des équations (6), § I, et des analogues, toute fonction donnée de $t, x, x', \ldots$ peut être exprimée au moyen de $t, \rho, \rho', \varphi, \varphi', \rho_1, \rho'_1, \varphi_1, \varphi'_1, \ldots$, et l'on doit adjoindre aux divers groupes, tels que (a), les équations

$$(b)\qquad k\mathrm{T} = \rho^2\varphi',\quad k_1\mathrm{T}_1 = \rho_1^2\varphi'_1,\quad \ldots.$$

A cause de

$$\rho = \sqrt{\mathfrak{F}},\quad \rho' = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathfrak{F}}},\quad \varphi' = \frac{\sqrt{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}}{\mathfrak{F}},$$

on peut aussi considérer V_i et R_i comme des fonctions des variables t, $\vec{r}$, f, F, φ; $\vec{r}_1$, f_1, F_1, φ_1, ..., et réduire, si l'on veut, chaque groupe, tel que (a), aux trois premières équations, en y adjoignant

$$(b') \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\vec{r}f - F^2}}{\vec{r}}.$$

Je me bornerai, comme ci-dessus, à la considération d'un seul groupe $(1')$ pour introduire diverses remarques.

Si R et V sont des fonctions données de t, φ, $\vec{r}$, f, F, on a naturellement à intégrer un système de quatre équations différentielles du premier ordre (a) et (b'). Mais le nombre des intégrales fondamentales à trouver diminuera d'une unité si t n'entre pas explicitement dans ces deux fonctions : ce nombre diminuera de deux unités si t et φ ne figurent pas dans les mêmes fonctions. Dans ce dernier cas, on aura, par exemple, à intégrer les équations simultanées

$$(c) \qquad \frac{df}{d\vec{r}} = R + \frac{Vf}{F}, \quad 2F\frac{dF}{d\vec{r}} = f + R\vec{r} + VF,$$

et à effectuer les deux quadratures

$$dt = \frac{d\vec{r}}{2F}, \quad d\varphi = \frac{\sqrt{Ff - F^2}}{2F\vec{r}}\,d\vec{r}.$$

Cette conclusion est tout à fait analogue à celle que formule Jacobi à la page 209 de son grand Mémoire *Sur le Multiplicateur* et que je me permets de rappeler :

« *Unde variabilium electione effectum est, ut motus cometæ circa solem in æthere resistente tantum pendeat ab integratione duarum equationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles* α, β, r; *qua transacta si determinantur* α *et* β *per* r, *obtinentur* φ *et* t *per quadraturas.* » (*Math. Werke*, I).

En supposant

$$\vec{r} = x^2 + y^2,$$

les variables de Jacobi sont

$$r = \sqrt{\bar{x}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} \int R \, d\bar{x}, \quad \beta = kT,$$

R ne devant dépendre que de r, restriction qui n'est pas nécessaire dans ce qui précède, et où R peut dépendre de $\bar{x}$, f, F d'une manière quelconque.

Les équations (a) fournissent la combinaison

$$\frac{1}{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{1}{f} \frac{df}{dt} - \frac{2}{F} \frac{dF}{dt} = \frac{2}{F} (F^2 - \bar{x} f) \left(\frac{1}{\bar{x}} + \frac{R}{f} \right),$$

d'où résulte

$$(a_0) \qquad \frac{d \log \frac{\bar{x} f}{F^2}}{d\bar{x}} = - \left(1 - \frac{\bar{x} f}{F^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{x}} + \frac{R}{f} \right),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(a) \qquad \frac{d \log \left(\frac{\bar{x} f - F^2}{f} \right)}{d\bar{x}} = - \frac{R}{f};$$

on a aussi

$$(b) \qquad \frac{d \log (\bar{x} f - F^2)}{d\bar{x}} = \frac{V}{F}.$$

Dans le cas particulier où

$$R = - \frac{f}{\bar{x}},$$

l'équation (a_0) donne

$$\bar{x} f = C F^2,$$

C étant une constante arbitraire. L'équation (b') fournit alors

$$\frac{dz}{d\bar{x}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{C - 1}}{\bar{x}}, \quad \text{d'où} \quad \bar{x} = C_1 e^{\frac{2z}{\sqrt{C - 1}}},$$

ce qui définit la *trajectoire* que l'on peut ranger, si l'on veut, dans la

classe des *spirales logarithmiques*. L'équation (b) donne, d'ailleurs,

$$\frac{dF}{d\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}V,$$

et en chassant f et φ du second membre, au moyen des deux intégrales précédentes, on sera amené à intégrer une équation différentielle du premier ordre, en supposant V indépendant de t. On aura ensuite t par une quadrature.

Les équations (a) et (b) mettent en évidence d'autres cas où l'on peut obtenir immédiatement une ou deux intégrales. Par exemple, si l'on suppose

$$(\alpha) \qquad \frac{R}{f} = \varpi(\mathfrak{F})\Phi\left(\frac{\mathfrak{F}f - F^2}{f}\right),$$

ϖ et Φ désignant des fonctions arbitrairement choisies, l'équation (a) fournira sur-le-champ une intégrale *indépendante de toute hypothèse faite sur la loi de résistance*.

Si l'on considère isolément l'équation (b) et que l'on suppose

$$(\beta) \qquad \frac{V}{F} = \psi(\mathfrak{F})\Psi(\mathfrak{F}f - F^2),$$

ψ et Ψ désignant des fonctions quelconques, cette équation fournira tout de suite une intégrale *indépendante de toute hypothèse faite sur la nature de la force centrale*.

Il est clair qu'en adoptant simultanément les expressions (α), (β) de R et de V, la solution complète s'achèvera par deux quadratures.

En posant généralement

$$\mathfrak{F}f - F^2 = w^2, \quad f = uw^2,$$

de façon que

$$F = \sqrt{\mathfrak{F}u - 1}\,w, \quad T = \frac{1}{k}w,$$

les équations (a) et (b) pourront s'écrire

$$\frac{du}{d\mathfrak{F}} = \frac{R}{w^2}, \quad \frac{dw}{d\mathfrak{F}} = \frac{V}{2\sqrt{\mathfrak{F}u - 1}},$$

et, en y joignant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{\xi}, \quad \frac{d\xi}{dt} = 2\sqrt{\xi u - 1}\, w,$$

on aura, sous une autre forme, les quatre équations qu'il s'agit d'intégrer dans le cas général où R et V sont des fonctions données quelconques de t, φ, ξ, f, F, c'est-à-dire ici de t, φ, ξ, u, w.

§ VII. — *Du multiplicateur relatif au système* (a).

Considérons en lui-même le système (a), ou plutôt le suivant,

$$(a_1) \quad dt = \frac{d\xi}{2F} = \frac{df}{2RF + 2Vf} = \frac{dF}{f + R\xi + VF} = \frac{dT}{TV} = \frac{d\varphi}{\left(\frac{\sqrt{\xi f - F^2}}{f}\right)},$$

dans lequel je suppose que R et V sont des fonctions de ξ, f, F, φ indépendantes de t. Le multiplicateur M, propre à ce système, pourra, conformément aux règles connues (*loc. cit.*, p. 77) [1], être défini par l'équation

$$(M) \quad \frac{d\log M}{dt} + 2F\frac{\partial R}{\partial f} + \xi\frac{\partial R}{\partial F} + 2f\frac{\partial V}{\partial f} + F\frac{\partial V}{\partial F} + 4V = 0.$$

En admettant qu'il ait été déterminé par un moyen quelconque, si R et V ne contiennent pas φ, soit

$$\Theta(\xi, f, F, T) = C,$$

C étant une constante arbitraire qui n'entre pas dans Θ, une intégrale indépendante de t du système (a_1); en l'adjoignant à l'intégrale

$$(d) \quad \frac{\sqrt{\xi f - F^2}}{T} = k,$$

---

[1] Les détails dans lesquels j'entre ici doivent être considérés comme un simple rappel des principes posés par le grand géomètre dans le Mémoire ci-dessus mentionné.

le principe du *dernier multiplicateur* (*loc. cit.*, p. 100) fournira la dernière intégrale

$$(e)\qquad \int \frac{\mathrm{MT}^2}{\left(k^2\mathrm{T}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{F}} - \mathrm{F}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)}\left(\mathrm{R}\,\mathrm{F} + \mathrm{V}\,\mathrm{f}\right)d\vec{x} - \mathrm{F}\,d\mathrm{f}\Big) = \text{const.},$$

d'où l'on doit éliminer, comme on le sait, F et T au moyen des deux intégrales précédentes, après que les différentiations partielles auront été effectuées.

Si R et V contiennent φ, les deux intégrales censées données étant représentées par

$$\Theta(\vec{x}, \mathrm{f}, \mathrm{F}, \varphi, \mathrm{T}) = \mathrm{C}, \quad \Theta_1(\vec{x}, \mathrm{f}, \mathrm{F}, \varphi, \mathrm{T}) = \mathrm{C}_1,$$

en les adjoignant à l'intégrale (*d*), la dernière intégrale sera

$$(f)\qquad \int \frac{\mathrm{MT}^2}{\Delta}\left(\mathrm{R}\,\vec{x} + \mathrm{V}\,\mathrm{f}\right)d\vec{x} - \mathrm{F}\,d\mathrm{f}\Big) = \text{const.},$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{F} & \dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{F}} & \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\mathrm{F}} \\ k^2\mathrm{T} & \dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}} & \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\mathrm{T}} \\ \Theta & \dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi} \end{vmatrix},$$

et j'écris ces formules (*e*), (*f*) dans l'unique prévision ou l'on parviendrait à trouver une ou deux intégrales lorsque, R et V étant donnés, on connait une expression de M vérifiant l'équation (M).

Dans le cas où R ne dépend que de $\vec{x}$ et de φ, en désignant par p un nombre donné quelconque et ajoutant à l'équation (M) la suivante,

$$(M_1)\qquad -p\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}\,dt} + p\mathrm{V} = 0,$$

qui provient de (a_1), on obtient

$$\frac{d\log\mathrm{MT}^{-p}}{dt} + 2\mathrm{f}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{T}} + \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{F}} + (p+1)\mathrm{V} = 0.$$

En égalant à zéro l'ensemble des termes qui suivent le premier, on aura

$$(\mu_1) \qquad M = T^p.$$

Ainsi, quand R dépend seulement de $\mathfrak{F}$ et de φ et que V est une fonction homogène de F et $\sqrt{f}$ de degré $-(p+4)$, pouvant contenir $\mathfrak{F}$ et φ d'une manière quelconque, la formule (μ_1) donne un multiplicateur du système (a_1). Si R et V ne contiennent point φ, il suffira, comme on l'a dit, de connaître une intégrale Θ pour ramener le problème aux quadratures. Par exemple, en prenant

$$V = \frac{\varpi'(\mathfrak{F})}{\varpi(\mathfrak{F})} F,$$

auquel cas

$$p = -5,$$

l'équation (b), § VI, fournit

$$\Theta = f^2 \varpi = C,$$

et la partie sous le signe $\int$ dans l'équation (e) revient à la différentielle exacte

$$\varpi \left[\left(R - \frac{\varpi'}{\varpi} \right) d\mathfrak{F} - df \right],$$

ce qui ne doit être considéré que comme une très simple vérification de mes propres calculs. On aurait un exemple un peu plus général, en supposant dans (β) la fonction Ψ égale à $(\mathfrak{F} f - F^2)^{-\left(\frac{p+4}{2}\right)}$, R ne dépendant encore que de $\mathfrak{F}$. L'équation (b) fournit l'intégrale Θ, et l'on peut ensuite appliquer la formule (e).

Lorsqu'on suppose

$$(j) \qquad V = \varpi(\mathfrak{F}) f^{-\left(\frac{p+4}{2}\right)},$$

$\varpi(\mathfrak{F})$ étant une fonction donnée quelconque; si R ne dépend que de $\mathfrak{F}$, on a le multiplicateur (μ_1), mais il reste à trouver une intégrale Θ pour

pouvoir appliquer la formule (e). La difficulté est alors concentrée dans la recherche de l'avant-dernière intégrale.

Admettons encore que R ne dépende que de $\bar{x}$, en sorte que

$$R = \psi'(\bar{x}),$$

ψ étant une fonction donnée à volonté : en désignant par p et q deux nombres quelconques aussi donnés, et ajoutant à l'équation (M) les deux équations du système (a_1), savoir :

$$-p\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} + pV = 0,$$
$$-q\frac{df}{dt} + q\varpi'(\bar{x})\frac{d\bar{x}}{dt} + 2qfV = 0,$$

puis égalant à zéro tout ce qui dépend de V dans l'équation obtenue, on en conclura

$$(k) \qquad \begin{cases} M = T^p e^{\varpi f - q\psi}, \\ V = \Phi e^{-pf}, \end{cases}$$

Φ étant une fonction homogène de F et $\sqrt{f}$, de degré $-(p+4)$, pouvant contenir $\bar{x}$ et φ d'une manière quelconque. Si Φ ne renferme pas φ, la connaissance d'une intégrale Θ suffira pour ramener le problème aux quadratures.

En dehors de cette forme V, qui correspond au cas signalé par Jacobi (*loc. cit.*, p. 208), il paraît difficile de découvrir quelque modification de l'équation (M), au moyen du système (a_1), qui permette de trouver un multiplicateur ne renfermant pas t, et tel que les expressions de R et de V soient dans une parfaite indépendance l'une de l'autre.

J'ajouterai quelques remarques pour le cas du vide. Il faut alors supposer $V = 0$, $T = 1$ et supprimer le terme intermédiaire $\frac{dT}{TV}$ dans le système (a_1). Si, à part l'intégrale

$$\sqrt{\bar{x}f - F^2} = k,$$

on en a une autre

$$\Theta(\vec{x}, f, F, \varphi) = C,$$

la dernière intégrale sera

$$\int \frac{M}{\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}} (R\, d\vec{x} - df) = \text{const.},$$

et si, en particulier, R ne dépend que de $\vec{x}$ et de φ, on peut prendre $M = 1$.

En conservant cette hypothèse sur la composition de R, soit

$$\Theta\left(\vec{x}, \varphi, \frac{d\vec{x}}{d\varphi}, k^2\right) = C$$

une intégrale première, résolue par rapport à la constante d'intégration de l'équation (1 1), § II, la dernière intégrale sera, M pouvant être pris égal à 1,

$$\int \frac{\left(\frac{k}{F} d\vec{x} - 2F\, d\varphi\right)}{\Delta} = \text{const.},$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{x} & \frac{\partial\Theta}{\partial f} \\ -2F & \frac{\partial\Theta}{\partial F} \end{vmatrix}.$$

La variable f ne pouvant s'introduire ici que par l'intégrale $\sqrt{\vec{x}f - F^2} = k$, le déterminant Δ se réduit à $\vec{x}\frac{\partial\Theta}{\partial F}$. D'ailleurs, à cause de

$$\frac{d\vec{x}}{d\varphi} = \frac{2F\vec{x}}{k},$$

on aura

$$\frac{\partial\Theta}{\partial F} = \frac{\partial\Theta}{\partial\frac{d\vec{x}}{d\varphi}} \frac{2\vec{x}}{k},$$

et l'on pourra prendre pour la dernière intégrale

$$\int \frac{(d\varphi - \varphi' d\varphi)}{\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi'}} = \text{const.},$$

en posant $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$ et supposant l'intégrale donnée écrite sous la forme qui correspond directement à la formule (11),

$$\Theta(\rho, \rho', \varphi) = C;$$

c'est, du reste, ce qui résulterait de ce qui est dit à la page 129 du Mémoire cité.

§ VIII. — *Mouvement des projectiles.*

Les équations de ce mouvement sont comprises dans le type

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \theta\frac{d\xi}{dt} + g,\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \theta\frac{d\eta}{dt} + g_1,\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \theta\frac{d\zeta}{dt} + g_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où $g, g_1, g_2, \ldots$ sont des constantes données. En posant

$$V = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \ldots} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{S}{V},$$

S serait la résistance tangentielle dans le cas de deux ou trois coordonnées rectangulaires $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Je considérerai généralement S et, par suite, θ comme une fonction quelconque de $\xi', \eta', \zeta', \ldots$. Cela posé, si l'on fait

$$x = \frac{d\xi}{dt}, \quad y = \frac{d\eta}{dt}, \quad z = \frac{d\zeta}{dt}, \quad \ldots,$$

la différentiation des équations précédentes fournira

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d\theta}{dt}x + \theta x',\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d\theta}{dt}y + \theta y',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ce qui rentre dans la forme (1'), § V, en prenant

$$V = \theta, \quad R = \frac{d\theta}{dt}.$$

A cause de

$$x' = \theta x + g,$$

en différentiant la première (6), § I, on aura

$$A[(\rho' - \theta\rho)\sin\varphi + \rho\varphi'\cos\varphi] + A'[(\rho' - \theta\rho)\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi] = g.$$

En multipliant et divisant par $\rho = \sqrt{\mathfrak{F}}$, puis posant

$$(7) \quad \frac{(F - \theta\mathfrak{F})\sin\varphi + kT\cos\varphi}{\sqrt{\mathfrak{F}}} = G, \quad \frac{(F - \theta\mathfrak{F})\cos\varphi - kT\sin\varphi}{\sqrt{\mathfrak{F}}} = G',$$

l'équation précédente et les analogues peuvent s'écrire

$$(8) \quad \begin{cases} AG + A'G' = g, \\ BG + B'G' = g_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De ces dernières relations résulte

$$F(AG, A, BG, B, \dots) = F(g, A, g_1, B, \dots),$$

c'est-à-dire

$$G = F(g, A, g_1, B, \dots),$$

et de même

$$G' = F(g, A', g_1, B', \dots).$$

Il en résulte aussi

$$\mathfrak{F}(g, g_1, \dots) = \mathfrak{F}(AG + A'G', BG + B'G', \dots) = G^2 + G'^2 = h^2.$$

On a

$$F(x, x', \dots) = F(x, \theta x + g, \dots) = \theta\mathfrak{F} + F(x, g, \dots),$$
$$f = \mathfrak{F}(x', y', \dots) = \mathfrak{F}(\theta x + g, \dots) = \theta^2\mathfrak{F} + 2\theta F(x, g, \dots) + h^2$$

et, par suite,

$$k^2T^2 = \mathfrak{F}f - F^2 = h^2\mathfrak{F} - F(x, g, \dots)^2.$$

En désignant par $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs de $x, y, \ldots$ répondant à $t = 0$, et par F_0 la fonction $F(x_0, g, y_0, g_1, \ldots)$, les relations (α) donneront, pour cette valeur de t, et en ayant égard aux égalités précédentes,

$$G = \frac{F_0 \sin\varphi_0 + \sqrt{h^2 \mathcal{F}_0 - F_0^2} \cos\varphi_0}{\sqrt{\mathcal{F}_0}},$$

$$G' = \frac{F_0 \cos\varphi_0 - \sqrt{h^2 \mathcal{F}_0 - F_0^2} \sin\varphi_0}{\sqrt{\mathcal{F}_0}},$$

où ne figurent que les données initiales en supposant aussi donnés, comme je le ferai toujours, les coefficients $a, b, \ldots$ qui entrent dans la composition de $\mathcal{F}$. Quant aux constantes $A, A', B, B', \ldots$, en ayant égard aux relations (g), aux formules (6), § I, et aux précédentes expressions de G, G', on aura

$$A = \frac{g\sqrt{\mathcal{F}_0}\cos\varphi_0 - G x_0}{\sqrt{h^2 \mathcal{F}_0 - F_0^2}}, \quad A' = \frac{-g\sqrt{\mathcal{F}_0}\sin\varphi_0 + G x_0}{\sqrt{h^2 \mathcal{F}_0 - F_0^2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où $h^2 = \mathcal{F}(g, g_1, \ldots)$ ne dépend que de quantités données et où l'on peut attribuer à φ_0 la valeur déterminée qu'on voudra, par exemple $\frac{\pi}{2}$ ou 0.

Maintenant les équations (α) donnent

$$(\beta) \qquad \begin{cases} F - \theta\mathcal{F} = \sqrt{\mathcal{F}}(G \sin\varphi + G' \cos\varphi), \\ kT = \sqrt{\mathcal{F}}(G \cos\varphi - G' \sin\varphi). \end{cases}$$

En faisant la somme des carrés et remplaçant k^2T^2 par $\mathcal{F}f - F^2$, on aura

$$f - 2\theta F + \theta^2 \mathcal{F} = h^2.$$

Si l'on élimine f au moyen de cette dernière relation, les équations (α).

§ VI, deviennent

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = 2F, \\ \dfrac{dF}{dt} = h^2 - \theta^2\bar{x} + 3\theta F + \dfrac{d\theta}{dt}\bar{x}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{kT}{\bar{x}}. \end{cases}$$

Quand on substitue dans ces équations les valeurs de F et de kT, déduites de (β), la seconde devient identique, et la première, comparée à la troisième, fournit, en réintroduisant ρ,

$$(\varepsilon)\qquad \frac{d\rho}{d\varphi} = \rho\,\frac{\rho\theta + G\sin\varphi + G'\cos\varphi}{G\cos\varphi - G'\sin\varphi}.$$

La fonction θ peut, comme je l'ai supposé, dépendre d'une manière quelconque de $\xi', \eta', \ldots$, c'est-à-dire de $x, y, z, \ldots$, ou enfin de ρ et φ, à cause des formules (6), § I. Son expression transformée contiendra $A, A', \ldots$; mais, d'après les valeurs ci-dessus de ces constantes, on peut considérer θ comme dépendant définitivement des coefficients qui entrent dans $\bar{x}$, des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$ et des constantes données $g, g_1, \ldots$.

L'équation (ε) étant intégrée et la constante qui s'introduit étant déterminée par la condition que $\rho = \rho_0$ pour $\varphi = \varphi_0$, la dernière (γ) donnera t par une quadrature. Cette équation (ε), qui est exactement de même forme que l'une des équations dont on s'occupe dans la *Balistique*, pourra, comme celle-ci, s'intégrer dans le cas où l'on prend

$$\rho\theta = p + q\rho^n,$$

n étant un exposant constant quelconque, et p, q des fonctions quelconques de φ. La résistance proprement dite étant généralement

$$S = V\theta,$$

et les calculs qu'il faut faire ici étant à peu près les mêmes que dans le cas ordinaire, on voit que, sans augmenter la difficulté analytique, on aura, par des transformations sensiblement pareilles, le mouvement

du projectile avec une loi de résistance représentée, soit par

$$S = \frac{V}{\rho}(p + q\rho^n),$$

soit par

$$S = p + qV^n,$$

où

$$V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots},$$

et où ρ désigne toujours la racine carrée d'une forme quadratique quelconque.

Or, à cause des coefficients arbitraires a, b, ... qui figurent dans ρ, on peut, en les déterminant convenablement, rapprocher davantage les résultats du calcul de ceux fournis par l'observation, bien que l'on fasse dépendre implicitement de la *direction* la résistance du milieu quand on ne réduit pas ρ^2 à une somme de carrés.

La quantité θ étant censée exprimée en $\vec{s}$ et φ, on a généralement

$$(\gamma) \qquad R = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial\vec{s}}\,2F + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\,\frac{kT}{\vec{s}}.$$

Si, en particulier, θ est donné en fonction de $\vec{s}$ seulement, les deux premières équations (γ) fourniront, en réintroduisant ρ,

$$(\delta) \qquad \frac{dF}{d\rho} = \rho\,\frac{h^2 - \theta^2\rho^2}{F} + \rho\left(3\theta + \rho\,\frac{d\theta}{d\rho}\right).$$

Quand on aura intégré cette équation, l'angle φ sera donné, sans intégration nouvelle, par la première équation (β), et l'on aura ensuite t par une quadrature.

L'équation (δ) est immédiatement intégrable lorsqu'on suppose

$$m\left(\rho\,\frac{d\theta}{d\rho} + 3\theta\right) = h^2 - \theta^2\rho^2,$$

m étant une constante quelconque. En faisant, pour un moment,

$$\theta = \frac{h^2}{m}\,v, \quad \rho = \frac{m}{h}\,x,$$

cette dernière relation peut s'écrire

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 1 - x^2y^2.$$

Elle admet la solution particulière

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

et l'on en conclut, par suite, pour la solution générale,

$$y = \frac{1}{x}\,\frac{e^{(x-\sigma)} - e^{-(x+\sigma)}}{e^{(x+\sigma)} + e^{-(x+\sigma)}} - \frac{1}{x^2},$$

σ étant une constante quelconque. Une pareille loi de résistance ne peut physiquement convenir. Il m'a paru néanmoins intéressant de la signaler, les seules lois où l'on soit parvenu à réduire le problème aux quadratures étant, à ma connaissance, comprises dans la formule $\rho\delta = p + q\rho''$, quand on y suppose que ρ désigne la vitesse.

Dans la question présente, on a un nombre suffisant d'intégrales pour appliquer le principe du dernier multiplicateur; mais, en se reportant à l'équation (M), § VII, et à l'expression ci-dessus (r) de R, on s'aperçoit que la détermination du multiplicateur M n'offre pas moins de difficultés que l'intégration directe de l'équation (ε) ou de l'équation (δ). Cette équation (δ), en changeant la notation, se rattache au type

$$y\frac{dy}{dx} = X + X_1 y,$$

où X, X_1 sont des fonctions données de x. Si l'on cherche un multiplicateur eulérien de la forme

$$\mu = y^m + \varphi_1 y^{m-1} + \varphi_2 y^{m-2} + \ldots + \varphi_{m-1} y + \varphi_m,$$

où φ_1, φ_2, ... sont des fonctions inconnues de x, et m un nombre

entier quelconque, on peut déterminer φ_1, φ_2, ... *moyennant* une certaine relation entre X et X_1; mais cette relation, pour le cas de l'équation (δ), fait dépendre la loi de résistance de l'intégration d'une équation qui n'est pas plus facile à traiter que l'équation (δ), bien qu'on puisse se borner à une solution particulière.

Dans de telles conditions, et si l'on veut adopter une loi de résistance autre que celle dont on a parlé plus haut, il faut revenir au procédé des approximations successives. En supposant que θ ne dépende que de $\mathfrak{F}$, il m'a paru qu'il y avait quelque avantage à conserver t comme variable indépendante. Les deux premières équations (γ) peuvent alors être remplacées par l'équation du second ordre

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = h^2 - \delta^2\mathfrak{F} + \left(\frac{3}{2}\delta + \mathfrak{F}\frac{d\theta}{d\mathfrak{F}}\right)\frac{d\mathfrak{F}}{dt}.$$

En admettant que la densité du milieu est assez faible, on pourra supposer

$$\delta = \varepsilon\left(a + a_1\mathfrak{F}^{\frac{1}{2}} + a_2\mathfrak{F} + a_3\mathfrak{F}^{\frac{3}{2}} + a_4\mathfrak{F}^2 + \ldots + a_n\mathfrak{F}^{\frac{n}{2}}\right),$$

ε étant un nombre très petit, et a, a_2, a_3, ... des coefficients finis censés connus. Si l'on conçoit $\mathfrak{F}$ développé suivant les puissances positives de ε, en sorte que

$$\mathfrak{F} = u + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

u, u_1, ... étant des fonctions inconnues de t; en substituant cette expression de $\mathfrak{F}$ dans celle de θ, puis dans l'équation différentielle, et égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de ε, on aura une suite d'équations différentielles qu'on pourra intégrer successivement, en déterminant les constantes arbitraires par la condition que u_1, u_2, ... et leurs dérivées premières s'évanouissent avec t. Quant à u, qui répond au mouvement parabolique, on aura

$$u = h^2t^2 + \mathfrak{A}t + \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ seront fournis par les valeurs initiales x_0, y_0, ...; u_1 sera donné

par une équation de la forme

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} = (M + N\sqrt{u})\frac{du}{dt} \quad \text{ou} \quad d\frac{du_1}{dt} = (M + N\sqrt{u})\,du,$$

M et N étant des fonctions rationnelles et entières de u, etc. Mais je n'insisterai pas en ce moment sur ce sujet, qui exige des calculs un peu longs quand on veut approprier l'ensemble des formules aux exigences de la Balistique.

Sur le développement des fonctions implicites en une série;

Par M. F. GOMES TEIXEIRA,

Professeur à l'Université de Coïmbre (Portugal).

On connaît la formule de Lagrange qui sert à développer en une série ordonnée suivant les puissances de x une fonction

$$u = f(y), \quad y = t + x\varphi(y).$$

Nous allons dans cette Note présenter une formule plus générale que celle de Lagrange, qui sert à développer en série ordonnée suivant les puissances de x une fonction u,

$$(1) \qquad \begin{cases} u = f(y), \\ y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^n\varphi_n(y). \end{cases}$$

Dérivant la deuxième des équations (1), on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y)$$
$$+ [x\varphi'_1(y) + x^2\varphi'_2(y) + \ldots + x^n\varphi'_n(y)]\frac{dy}{dx},$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 + [x\varphi'_1(y) + x^2\varphi'_2(y) + \ldots + x^n\varphi'_n(y)]\frac{dy}{dt},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\left[\varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y)\right]$$

ou

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}\varphi_i(y) \quad .$$

Mais, étant

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt},$$

nous avons

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\sum ix^{i-1}\varphi_i(y) \quad ,$$

ou

$$(4) \qquad \frac{du}{dx} = \theta\frac{du}{dt},$$

où l'on pose

$$(5) \qquad \theta = \sum ix^{i-1}\varphi_i(y).$$

Dérivant l'équation (4) et ayant égard à l'équation (2), il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dxdt}\theta + \frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx} + \theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dxdt} = \frac{d^2u}{dt^2}\theta + \frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt};$$

donc

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\theta^2 + \frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx} + 2\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}\right)$$

ou

$$(6) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta^2\right)}{dt} + \frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dx}.$$

En dérivant (6), on obtient de la même manière

$$(7) \qquad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\theta^3\right)}{dt^2} + 3\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta\frac{d\theta}{dx}\right)}{dt} + \frac{du}{dt}\frac{d^2\theta}{dx^2},$$

et après

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^3\left(\frac{du}{dt}\theta^3\right)}{dt^3} + 6\frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\theta^2\frac{d\theta}{dx}\right)}{dt^2} + 3\frac{d\left[\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right]}{dt} + 4\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)}{dt} + \frac{du}{dt}\frac{d^3\theta}{dx^3}.$$

On obtient les dérivées suivantes de la même manière. Nous allons en chercher la loi.

En général, représentant par θ', θ'', θ''', ... les dérivées de θ par rapport à x, on a

$$(8)\qquad \frac{d^{i-1}u}{dx^{i-1}} = \sum \frac{d^{i-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^k(\theta')^m(\theta'')^p(\theta''')^q\ldots\right]}{dt^{i-1}},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{d^iu}{dx^i} = \sum\Bigg\{&\frac{d^{i-1}\left[\frac{d^2u}{dt^2}\theta^{k+1}(\theta')^m(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{i-1}}\\ &+\frac{d^{i-1}\left[\frac{du}{dt}\left(\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}(k+1)+k\frac{d\theta}{dx}\right)\theta^{k-1}(\theta')^m(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{i-1}}\\ &+\frac{d^{i-1}\left[m\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta'}{dx}+\frac{d\theta'}{dy}\frac{dy}{dt}\theta\right)\theta^k(\theta')^{m-1}(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{i-1}}\\ &+\frac{d^{i-1}\left[p\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta''}{dx}+\frac{d\theta''}{dy}\frac{dy}{dt}\theta\right)\theta^k(\theta')^m(\theta'')^{p-1}(\theta''')^q\ldots\right]}{dt^{i-1}}+\ldots\Bigg\}\end{aligned}$$

ou

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d^iu}{dx^i} = \sum\Bigg\{&\frac{d^i\left[\frac{du}{dt}\theta^{k+1}(\theta')^m(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^i}\\ &+k\frac{d^{i-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^{k-1}(\theta')^{m+1}(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{i-1}}\\ &+m\frac{d^{i-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^k(\theta')^{m-1}(\theta'')^{p+1}(\theta''')^q\ldots\right]}{dt^{i-1}}\\ &+p\frac{d^{i-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^k(\theta')^m(\theta'')^{p-1}(\theta''')^{q+1}\ldots\right]}{dt^{i-1}}+\ldots\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Comparant cette formule à la formule (8), on voit que chaque terme de (8) donne une somme de termes qu'on forme de celui-là en ôtant une unité à l'exposant de chaque facteur $1, \theta, \theta', \theta'', \ldots$ et en l'additionnant à celui du suivant, et donnant pour coefficient au terme l'exposant qui a été diminué.

L'ordre de la dérivée par rapport à t qui entre en chaque terme est égal à la somme des exposants de $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ dans le terme moins une unité. En effet, cela est vrai pour la dérivée $\frac{d^2 u}{dx^2}$, et par la formule (9) on voit que l'ordre de chaque dérivée augmente d'une unité dans le passage de $\frac{d^{a-1} u}{dx^{a-1}}$ à $\frac{d^a u}{dx^a}$, ainsi que la somme des exposants de $\theta, \theta', \theta'', \ldots$.

Nous avons donc, en remarquant que les dérivées de θ d'ordre plus grand que n sont nulles, la formule suivante,

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum A \frac{d^b \left[\frac{du}{dt} \theta^\alpha (\theta')^\beta (\theta'')^\gamma \ldots (\theta^{(n-1)})^\lambda \right]}{dt^b},$$

où l'on doit donner à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = i,$$

et où b est donné par la formule

$$b + 1 = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Il ne nous reste qu'à déterminer le coefficient A. Pour cela nous ferons

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \ldots = \varphi_n(y) = 1,$$

et nous aurons

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum A \frac{d^{b+1} u}{dy^{b+1}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^\lambda.$$

Mais on trouve dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand la for-

mule suivante, qui donne la dérivée d'ordre i de u étant $u = f(y)$, $y = \psi(x)$,

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum 1.2\ldots i \frac{d^p u}{dy^p} \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha}{1.2\ldots\alpha} \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\beta}{(1.2)^\beta 1.2\ldots\beta} \cdots \frac{\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)^\lambda}{(1.2\ldots n)^\lambda 1.2\ldots\lambda},$$

où

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = i, \quad \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = b + 1 = p.$$

La comparaison des deux formules précédentes mène à la valeur de A qui, substituée dans la formule générale, donne la suivante

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum \frac{1.2\ldots i \dfrac{d^p\left[\dfrac{du}{dt}\theta^\alpha(\theta')^\beta(\theta'')^\gamma\ldots(\theta^{(n-1)})^\lambda\right]}{dt^p}}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda(1.2)^\alpha(1.2.3)^\beta\ldots(1.2\ldots n)^\lambda}.$$

Nous avons ainsi l'expression générale de la dérivée de u par rapport à x de la fonction (1).

Pour obtenir maintenant le développement de u en série ordonnée suivant les puissances de x, nous emploierons la formule de Maclaurin

$$u = u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 x^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 x^3 + \ldots,$$

et les coefficients seront donnés par la formule précédente, en y faisant $x = 0$.

En y faisant donc $x = 0$, nous aurons premièrement

$$u = f(t), \quad y = t, \quad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

Ensuite les formules

$$\begin{aligned}
\theta &= \varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y),\\
\theta' &= 2\varphi_2(y) + 3.2x\varphi_3(y) + \ldots + n(n-1)x^{n-2}\varphi_n(y),\\
\theta'' &= 3.2\varphi_3(y) + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\varphi_n(y),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\theta^{(n-1)} &= n(n-1)\ldots 2.1\varphi_n(y),\\
\theta^{(n)} &= 0
\end{aligned}$$

donneront

$$\theta = \varphi_1(t),\quad \theta' = 2\varphi_2(t),\quad \theta'' = 3.2\varphi_3(t),\quad \ldots\quad \theta^{(n-1)} = n(n-1)\ldots 2.1\varphi_n(t),$$
$$\theta^{(n)} = \theta^{(n+1)} = \theta^{(n+2)} = \ldots = 0.$$

Nous aurons donc

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = f'(t).\varphi_1(t),$$
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{d\{f'(t).[\varphi_1(t)]^2\}}{dt} + 2f'(t)\varphi_2(t),$$
$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = \frac{d^2\{f'(t)[\varphi_1(t)]^3\}}{dt^2} + 6\frac{d[f'(t)\varphi_1(t)\varphi^2(t)]}{dt} + 6f'(t)\varphi_3(t).$$

En général

$$\left(\frac{d^iu}{dx^i}\right)_0 = \sum \frac{1.2\ldots i d^b\{f'(t).[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi^2(t)]^\beta\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda\, dt^b},$$

où l'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = i$$

et où b est donné par la formule

$$b + 1 = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Nous avons donc la formule

$$u = f(t) + xf'(t)\varphi_1(t) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\sum \frac{d^b\{f'(t).[\varphi_1(t)]^\alpha\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda\, dt^b} + \ldots,$$

qui contient comme cas très particulier celle de Lagrange.

Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Nous avons, dans un précédent Mémoire [1], fait connaître une méthode pratique pour intégrer, sous forme finie, trois espèces d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants ou variables, appartenant toutes les trois au genre des équations différentielles linéaires qui possèdent une équation dérivée régulière.

En même temps, nous avons fait remarquer que les différentes espèces d'équations différentielles linéaires contenues dans ce genre correspondaient à différentes espèces de séries; et que, dès qu'on savait sommer une de ces espèces de séries, on savait intégrer, sous forme finie, l'espèce correspondante d'équations différentielles linéaires.

Les trois espèces d'équations différentielles que nous avons intégrées déjà correspondaient à trois espèces de séries que nous savions sommer. Nous avons sommé postérieurement [2] une nouvelle espèce de séries, et nous nous proposons, dans le présent travail, d'intégrer, sous forme finie, l'espèce correspondante d'équations différentielles linéaires, laquelle constituera pour nous la quatrième espèce, dans le

(1) *Journal de Mathématiques*, année 1880, p. 27.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 avril 1879.

genre des équations différentielles linéaires qui présentent une équation dérivée régulière.

2. Les équations différentielles linéaires de cette quatrième espèce sont des équations différentielles linéaires sans second membre, d'ordre quelconque, à coefficients variables, et relatives chacune à une seule fonction Y d'une seule variable indépendante x; elles possèdent une équation dérivée régulière; et l'espèce qu'elles constituent est caractérisée par la forme de $F(n)$ que définit l'égalité

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)f(n)},$$

dans laquelle p est un nombre quelconque, positif ou négatif, mais non pas entier; et où $f(n)$ représente un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Ces équations s'intègrent, sous forme finie, à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'expressions irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$. Pour les intégrer, nous allons nous reporter au Mémoire que nous avons rappelé en commençant, Mémoire dont nous ne faisons, pour ainsi dire, dans le présent travail, qu'une simple application, en en conservant, sans modification aucune, toutes les définitions et toutes les notations.

3. Nous reportant donc à ce premier Mémoire, nous y trouvons, au paragraphe **6** [1], la formule

$$Y = X + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{n!\,F(n)} x^n,$$

où ν et k sont des entiers déterminés, où c_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, et où X représente un polynôme en x, très facile à former, qui s'annule lorsqu'on a

$$k = \nu + 1.$$

---

(1) *Journal de Mathématiques*, année 1880, p. 32.

Cette formule donne, à l'aide d'une série, une intégrale de l'équation différentielle linéaire qu'on se propose d'intégrer; et cette intégrale en est d'ordinaire l'intégrale générale; car, dans la plupart des cas, X et c_n contiennent un nombre de constantes distinctes juste égal à l'ordre de l'équation différentielle linéaire considérée.

Si nous remplaçons, dans cette formule, $F(n)$ par son expression (2), nous trouvons l'égalité

$$Y = X + \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} f(n) c_n x^n,$$

que nous pouvons écrire encore

$$Y = X_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} u_n x^n,$$

en désignant par X_1 un polynôme entier en x dont le mode de formation, à l'aide de X et de la série, se voit immédiatement, et par u_n le produit $f(n) c_n$, lequel constitue, tout aussi bien que c_n, le terme général d'une série récurrente proprement dite.

4. L'intégration, sous forme finie, que nous nous proposons d'effectuer, est ramenée ainsi à la sommation de la série dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} u_n x^n.$$

Or nous savons sommer une pareille série. En effet, si nous considérons l'équation génératrice de la série récurrente dont u_n est le terme général, et que nous désignions par a l'une quelconque de ses racines et par α le degré de multiplicité de a, nous avons identiquement, en représentant par $\xi_a(n)$ un polynôme entier en n, du degré $\alpha - 1$, et en étendant le Σ à toutes les racines de l'équation génératrice,

$$u_n = \sum \xi_a(n) a^n.$$

Cela étant, nous avons récemment [1] annoncé que si, partant de l'égalité donnée

$$\xi_a(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{\alpha-1} n^{\alpha-1},$$

l'on pose

$$Q_{a,h} = \frac{p(p+1)\ldots(p+h-1)}{1.2\ldots h}(A_h \Delta^h 0^h + A_{h+1}\Delta^h 0^{h+1} + \ldots + A_{\alpha-1}\Delta^h 0^{\alpha-1})$$

et que l'on appelle S la somme de la série considérée, on a, en étendant encore le Σ dépourvu d'indices à toutes les racines de l'équation génératrice,

$$S = \sum \sum_{0}^{\alpha-1}{}_h Q_{a,h} a^h x^h (1 - ax)^{-p-h}.$$

5. Portant cette expression de S dans la dernière formule (3) qui nous donne Y, nous trouvons la formule nouvelle

$$Y = X_1 + \sum \sum_{0}^{\alpha-1}{}_h Q_{a,h} a^h x^h (1 - ax)^{-p-h},$$

qui nous donne, sous forme finie, l'intégrale des équations différentielles linéaires de notre quatrième espèce.

Comme nous l'avons dit (3), cette intégrale est d'ordinaire l'intégrale générale. Il suffit de la considérer pour constater qu'elle ne contient que des fonctions algébriques rationnelles et des expressions irrationnelles de la forme $(1 - ax)^p$.

Il est d'ailleurs bien clair que ce mode d'intégration est aussi simple et aussi pratique que ceux que nous avons donnés dans notre premier Mémoire. Il nécessite, comme les deux derniers de ceux-ci, auxquels il est fort analogue, la résolution préalable de l'équation que nous avons appelée *équation caractéristique*. Pour en bien faire comprendre la simplicité et la commodité, nous allons l'appliquer à l'intégration d'une équation différentielle linéaire donnée.

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 avril 1879.

6. Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(2x^2 - 3x + 1)\frac{d^2Y}{dx^2} + \left(\frac{16}{3}x - 4\right)\frac{dY}{dx} + \frac{8}{9}Y = 0.$$

Elle appartient à notre quatrième espèce, car son équation dérivée, pouvant s'écrire

$$\frac{Y_0^{(n)}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)} - 3\frac{Y_0^{n-1}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-2)} + 2\frac{Y_0^{n-2}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-3)} = 0,$$

est régulière et montre que l'on a

$$F(n) = \frac{1}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}.$$

Donc, nous avons immédiatement (**5**)

$$Y = X + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n} v_n x^n,$$

v_n étant le terme général d'une série récurrente proprement dite, qui admet l'équation génératrice

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Cette équation génératrice ayant pour racines les nombres 1 et 2, nous pouvons, en désignant par C_1 et C_2 deux constantes arbitraires, écrire l'égalité

$$v_n = C_1 1^n + C_2 2^n.$$

De plus, dans l'exemple actuel, les nombres ν et k, définis comme dans notre premier Mémoire, ont pour valeurs respectives 1 et 2.

Donc, d'après ce que nous avons dit (5), le polynôme X disparaît, et il vient

$$Y = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n}(C_1 1^n + C_2 2^n)x^n.$$

La série qui figure au second membre de cette égalité se peut sommer sans même qu'on soit obligé de recourir à la formule générale que nous avons donnée (4). On a, en effet, immédiatement

$$Y = C_1 \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n} x^n + C_2 \sum_{0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n}(2x)^n;$$

et l'on tire de là

$$Y = \frac{C_1}{\sqrt[3]{1-x}} + \frac{C_2}{\sqrt[3]{1-2x}}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire considérée.

De la propagation verticale des ondes dans les liquides;

PAR M. P.-A. CORNAGLIA,

Ingénieur en chef du Génie civil,
Ancien élève de l'École nationale des Ponts et Chaussées de Paris.

I.

1. Soit une masse liquide en agitation, uniquement par l'effet du mouvement des ondes produites dans cette masse par le vent, ou par toute autre cause qui agisse d'une manière analogue.

Avant tout, de nombreux faits d'observation prouvent positivement que l'agitation, en certaines circonstances, se propage à des profondeurs considérables.

Il suffit de citer l'exemple du banc de Terre-Neuve, dont la réaction sur les ondes est très sensible aux bâtiments qui s'en approchent, bien qu'il se trouve de 80^m à 160^m au-dessous de la surface de la mer.

Ce fait démontre que l'agitation sur le banc doit être bien puissante pour produire des effets sensibles à travers une colonne liquide de si grande hauteur, et qu'elle doit s'étendre encore bien plus bas.

Par contre, l'agitation devient insensible à une certaine profondeur.

Les matières extraites au moyen de la sonde prouvent que les plus terribles tempêtes de l'Atlantique n'ont pas la force de produire sur le fond, le long du plan de pose du télégraphe, une ondulation suffisante

pour corroder les organismes très délicats qui y sont déposés, ni de les transporter aux alentours, ni même d'y mêler des grains de sable, si fins qu'ils soient [1].

Quelquefois l'agitation devient insensible à des profondeurs beaucoup moins grandes

Les plongeurs sont d'accord pour affirmer que d'ordinaire, à des profondeurs peu considérables, la mer reste sensiblement calme au fond, bien qu'elle soit très agitée à la surface.

Non loin des côtes, et par conséquent a des profondeurs moyennes, mais assez grandes encore pour qu'on ne puisse pas y jeter l'ancre, les navires peuvent tenir suffisamment bien, pendant une nuit entière de gros temps, sur une ancre flottante, descendue à la profondeur d'une centaine de brasses au moins.

L'ancre flottante est formée par une croix de Saint-André sur laquelle on étend fortement une voile; on la suspend à un grelin attaché aux quatre extrémités de la croix.

Ce mode de mouillage ne tient plus si l'on descend cette ancre à peu de mètres seulement de profondeur.

La différence de pression sur les deux faces de l'ancre est toujours égale au poids de l'eau déplacée, quelle que soit la profondeur à laquelle l'ancre se trouve; d'autre part, les résistances du navire et de l'ancre flottante dans la direction de leur câble d'union sont opposées l'une à l'autre, et respectivement proportionnelles au carré de leur vitesse relative par rapport au liquide en contact dans cette même direction; on doit conclure de là que, dans ces conditions, l'ancre se trouve dans un liquide ambiant assez tranquille pour pouvoir tenir.

Quelles que soient du reste les causes par lesquelles l'agitation se propage plus ou moins profondément, d'après les faits qu'on vient de citer, elle ne s'étend donc pas au delà d'une certaine limite; et cette limite, contrairement à l'opinion de quelques-uns qui ont voulu trop généraliser certains faits d'observation, n'est pas absolue, mais variable selon les circonstances dans lesquelles l'agitation se produit.

Et comme l'action d'une force s'affaiblit en se transmettant, il s'ensuit que l'agitation doit aller toujours en diminuant d'une manière

---

[1] Maury, *Géographie physique de la mer.*

continue, quelle qu'en soit la loi, à mesure que de la surface on descend vers la limite où elle cesse tout à fait.

On peut représenter cette limite par un plan horizontal, si le fond lui-même est horizontal, et si les ondes sont égales entre elles; c'est ce qu'on doit supposer quand on se propose uniquement d'étudier la propagation du mouvement dans la direction verticale.

D'ailleurs, si des causes exceptionnelles n'interviennent pas, l'observation fait voir qu'une onde, dans un bref trajet, conserve très approximativement la même forme et la même vitesse; et que les ondes qui lui sont immédiatement adjacentes lui sont aussi très approximativement égales, au point qu'on peut les regarder toutes comme telles, et comme animées d'une vitesse uniforme.

Or, dans le plan de la section droite des ondes, les verticales comprises entre la surface du liquide et la limite de l'agitation sont d'autant plus longues que du point le plus bas de l'onde on va vers son sommet, et *vice versa*, elles sont d'autant plus courtes à mesure que du sommet on s'approche du point le plus bas suivant.

Par suite, pendant le passage de l'onde, chacune de ses verticales subit successivement toutes les phases de longueur de toutes les autres comprises entre les deux extrémités de l'onde.

Et comme l'observation montre encore que le liquide ne possède pas un vrai mouvement de translation continu, mais un mouvement apparent dans le sens de l'avancement des ondes; comme, d'autre part, le liquide est continu et incompressible [1], et qu'aucune molécule située au-dessus de la limite d'agitation ne le dépasse jamais pour venir se mêler avec celles qui se trouvent en dessous, et *vice versa*, il s'ensuit que l'afflux de liquide vers le sommet de l'onde doit s'opérer moyennant un écoulement correspondant des creux adjacents, et inversement.

L'observation enseigne encore que dans le mouvement des molécules il n'y a pas de confusion : s'il en était autrement, elles s'embarrasseraient l'une l'autre, et bientôt le mouvement cesserait ; tandis que les faits démontrent, au contraire, que les ondulations se propagent dans la direction horizontale à de très grandes distances sans diminuer

---

[1] *Incompressible* dans le sens entendu par les physiciens, c'est-à-dire qu'il ne change sensiblement de volume que sous d'énormes différences de pression.

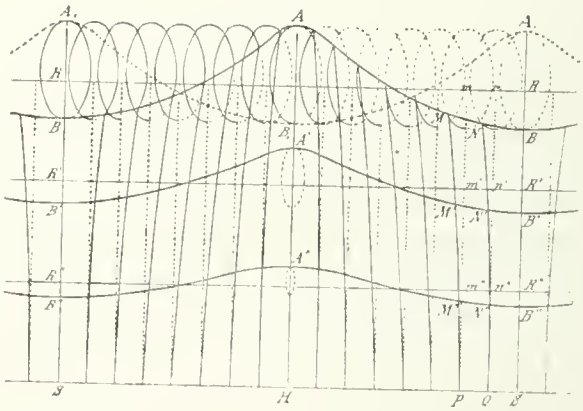
beaucoup de grandeur, s'il n'intervient pas d'autres causes, et que sur le même point elles durent encore longtemps après la cessation de la cause qui les a produites.

De tout cela il faut conclure que les molécules oscillent entre certaines limites, aussi bien dans la direction verticale que dans l'horizontale, et que les oscillations vont toujours en diminuant à mesure que les molécules se trouvent à une plus grande distance de la surface du liquide.

2. Le colonel Emy a expliqué très plausiblement tout ce mécanisme des ondes de la manière suivante :

Soit d'abord une masse liquide en repos avec la surface en RR; divisons (*fig.* 1) cette masse en un certain nombre de tranches P*mn*Q

Fig. 1.



par des plans verticaux P*m*, Q*n* normaux à la direction du mouvement de translation des ondes qui se produisent les unes à la suite des autres.

Lors du passage d'une onde, chaque tranche, de volume constant, s'allonge continuellement dans la période montante de l'onde, à partir du point plus bas B jusqu'au sommet A; et *vice versa*, dans la période descendante, elle se raccourcit continuellement à partir du sommet A, jusqu'au point le plus bas B suivant.

Le volume des tranches ne variant pas, la forme doit varier; par conséquent, l'allongement et le raccourcissement suivant la direction

verticale se produiront au moyen d'un amincissement et d'un gonflement correspondant suivant la direction horizontale.

En outre, comme à sa base PQ, située dans la surface limite de l'agitation SS, chaque tranche doit rester telle qu'elle était lorsque le liquide était en repos, c'est-à-dire à la même position et de la même largeur, il s'ensuit que les allongements et les raccourcissements dans une direction, et les amincissements et gonflements correspondants dans l'autre direction, bien que produits sur toute l'étendue des tranches, ne pourront cependant pas être uniformes, et seront d'autant plus grands qu'ils seront plus éloignés de la limite d'agitation.

Dès lors, les tranches qui doivent toujours se juxtaposer exactement entre elles, en vertu de la continuité du liquide, viendront à s'incliner, et, selon leur degré d'amincissement ou de gonflement dans les divers points, se courberont suivant PMNQ, convergeront vers le sommet de l'onde et divergeront de son point le plus bas, de sorte que le déplacement vertical des molécules produit sur elles-mêmes un déplacement horizontal.

Ces déplacements diminuent tous au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de la surface, de telle sorte que l'agitation diminue aussi jusqu'à sa limite.

De tout cela il résulte encore :

1° Que les couches horizontales R'R' du liquide en repos se gonflent pendant le mouvement dans leur milieu et s'amincissent à leurs extrémités, de sorte qu'elles viennent à se plier suivant une courbe B'A'B' qui représente l'onde interne correspondante au niveau primitif R'R';

2° Que les molécules situées sur la même verticale P*m* dans le liquide en repos viennent dans le mouvement à se disposer sur une autre courbe PM, qui passe par le pied P de la verticale dans la limite de l'agitation, et qui converge vers le sommet et diverge du point le plus bas de l'onde.

Les molécules se trouveront donc au point d'intersection des courbes respectives des deux systèmes différents.

Et comme, dans le passage d'une onde entière, chaque tranche passe successivement par toutes les formes que prend le nombre infini de tranches dans lequel on peut imaginer divisée la masse liquide, il s'ensuit que la suite de tous les points d'intersection d'une même onde

interne, rapportés à la même verticale, représentera les trajectoires des molécules situées au même niveau dans le liquide en repos, ou bien sur la même onde interne lorsque le liquide est en mouvement.

De plus, si l'onde suivante est égale à celle que l'on considère, comme on l'a supposé, puisque leurs tranches correspondantes sont identiques dans toutes les deux, il s'ensuit que la même molécule devra se trouver périodiquement, à l'intervalle d'une onde entière, précisément à la même position qu'auparavant, et sa trajectoire, dans ces conditions, sera une courbe fermée.

Les axes horizontal et vertical de cette orbite indiqueront les limites des oscillations des molécules dans ces directions.

Mais les molécules situées sur une même verticale dans le liquide en repos doivent toutes se mouvoir, au même moment, dans des conditions analogues : quand l'une d'elles s'élève, par exemple, toutes les autres, jusqu'à la limite de l'agitation, s'élèvent aussi, quoique en différente mesure, et toutes passent au même instant par les mêmes particularités du mouvement.

Par conséquent, les ondes internes et l'onde visible, suivant lesquelles se disposent les molécules qui sont au même niveau dans le liquide en repos, et les orbites décrites par les molécules situées sur la même verticale dans le liquide en repos, doivent être toutes des courbes synchrones, quelle que soit la loi de propagation du mouvement dans la direction verticale.

En d'autres termes, les ondes internes ont la même amplitude et sont disposées de la même manière que l'onde visible, tout en diminuant de hauteur à mesure qu'elles se trouvent plus bas, et les orbites, dont la forme est en corrélation avec celle des ondes, sont décrites en temps égaux, bien qu'elles deviennent de plus en plus petites à mesure qu'elles se trouvent à des profondeurs plus grandes.

3. Tout cela est parfaitement d'accord avec les phénomènes que l'on observe dans la nature.

En effet, lorsque la mer est suffisamment agitée et que les eaux sont claires, s'il s'y trouve des corps en suspension, des brins d'algue par exemple, on aperçoit que les corps situés sur la même verticale ont tous au même instant un mouvement vers le large quand ils se

trouvent dans le creux de l'onde, et vers la rive, quand ils se trouvent au contraire sur le dos, c'est-à-dire dans le flot, abstraction faite de la grandeur des mouvements qui sont plus prononcés vers la partie supérieure.

On ressent les mêmes effets quand on se livre à l'exercice de la natation, surtout quand on se tient debout sans faire aucun mouvement, et si l'on se trouve à une profondeur à peu près égale à la hauteur de la personne.

Évidemment, cela n'arriverait pas si à toutes les profondeurs les agitations n'étaient pas synchrones.

4. D'après cela, et quoi qu'il en soit de l'explication donnée des différents phénomènes naturels qu'on a cités, il est incontestable que le mouvement vertical des molécules y produit un mouvement horizontal correspondant.

Il s'agit de déterminer ces divers mouvements.

A ce sujet, il est à noter que les méthodes générales de la science abstraite et pure, rigoureusement suivies jusqu'à présent sur cette matière, n'ont pas encore permis d'arriver à des résultats d'un usage vraiment pratique; et cela à cause du caractère des expressions algébriques auxquelles on parvient : ce qui leur a fait donner par Lagrange le nom de *rebelles*.

Dans cet état de choses, l'ingénieur, dans les questions d'art, se trouve abandonné à ses propres appréciations, lesquelles sont plus ou moins justes, selon que ses observations sont plus ou moins complètes et exactes, et ses déductions plus ou moins légitimes.

De là les interminables discussions qui sont pour ainsi dire une caractéristique des questions de travaux maritimes. C'est pourquoi, ayant essentiellement en vue de donner des règles qui soient au moins suffisantes à l'ingénieur pour ses applications, on suivra une méthode spéciale : à l'aide des faits constatés par l'observation, on suivra pas à pas et de près le phénomène, en appliquant séparément les principes à mesure que l'on verra se présenter de nouvelles circonstances pouvant exercer une influence sur son développement, et en laissant de côté tout ce qui compliquerait inutilement les procédés et les résultats analytiques.

II.

5. Si l'on connaissait les forces qui les produisent, on obtiendrait directement la détermination des mouvements cherchés.

Or, à ce propos, on doit noter que chaque effet est proportionné à la cause qui le produit et *vice versa ;* de sorte que, par les données de l'onde elle-même, qui est un effet, on peut en apprécier la cause, c'est-à-dire l'intensité et la direction de la force qui produit cette onde, ou qui est capable de la produire, en même temps qu'elle est capable d'engendrer les divers mouvements qui se développent dans la masse liquide.

Ceci posé, un point quelconque d'une masse liquide dans les conditions d'agitation énoncées plus haut se trouve simultanément soumis :

1° A l'action produite par le déplacement de cette protubérance de liquide qui forme l'onde visible;

2° A la réaction des molécules qui l'environnent dans leurs mouvements. Dans la réaction des molécules sont compris les effets du frottement dû à la viscosité; mais comme, d'après ce qu'on a dit, les faits démontrent que la diminution de l'agitation est très lente par rapport au temps et à la distance, on peut négliger le frottement dû à la viscosité du liquide, et restreindre cette réaction à l'impulsion ou à l'empêchement réciproque que les molécules en mouvement exercent, à cause de la différence de leurs vitesses.

Du reste, notre but n'est pas d'étudier comment l'agitation augmente ou diminue avec le temps et la distance, mais de rechercher quels sont les effets produits dans l'intérieur d'une masse liquide par l'agitation que l'on observe à la surface, au même moment et en des points voisins de celui où l'on fait l'observation.

6. Que l'on rapporte la masse liquide à des systèmes d'axes de coordonnées placés dans le plan de la section droite de l'onde :

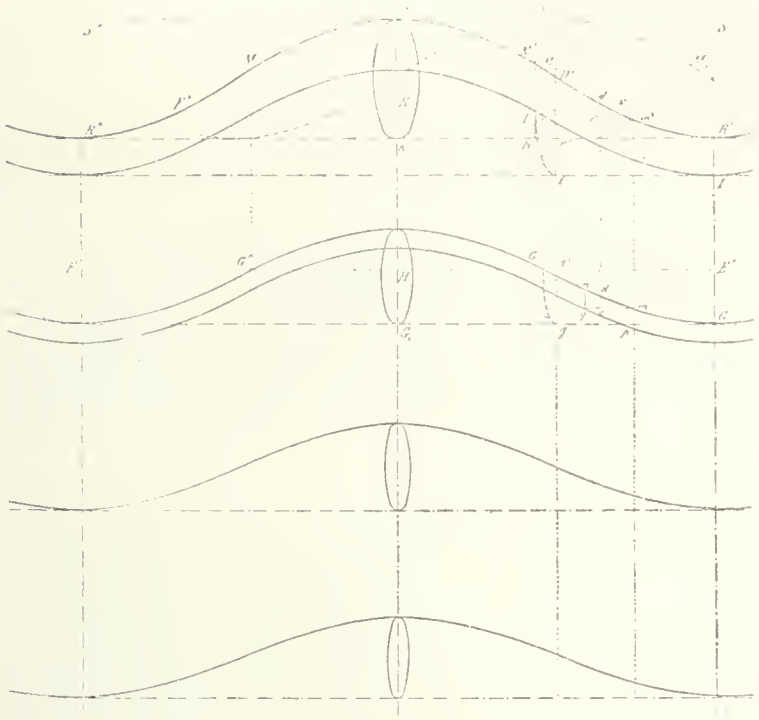
Les axes des abscisses (x) seront horizontaux, et positifs de gauche à droite, sens dans lequel on supposera que l'onde se déplace;

Les axes des ordonnées (y) seront verticaux, et positifs de bas en haut.

Pendant le mouvement de l'onde, chaque point de la masse liquide viendra successivement traverser la verticale R'S' (*fig.* 2) qui passe par le point le plus bas de l'onde.

Soit p la profondeur du point quelconque que l'on considère, au-

Fig. 2.



dessous du point le plus bas R' de la surface du liquide.

Fixons dans cette position les axes des coordonnées du point; et soient par rapport à eux, au bout du temps t,

x, y les coordonnées du point;
u, v les composantes de sa vitesse;
z la hauteur de la colonne liquide au-dessus de ce point, c'est-à-dire la longueur de la verticale comprise entre le point et la surface du liquide.

Soient encore :

Y l'ordonnée correspondante à $p = 0$, c'est-à-dire celle du point qui se trouve à la surface du liquide ;

U, V les composantes de sa vitesse.

Appelons encore, pour les deux branches montante et descendante de l'onde,

A la hauteur de l'onde visible, c'est-à-dire la différence de niveau entre son sommet et les points les plus bas des creux adjacents ;

L la demi-amplitude de l'onde, c'est-à-dire la distance des verticales qui passent, l'une par son sommet et les autres par les points plus bas susdits ;

T le temps du passage d'une onde entière ;

W sa vitesse de translation suivant la direction horizontale.

7. Du moment que, comme on l'a dit, le mouvement de translation de l'onde en direction horizontale peut être regardé comme uniforme sur un bref trajet, on aura

$$W = \frac{2L}{T}.$$

Après le temps t, l'onde qui, à l'origine du temps T, se trouvait en OM′R′, se sera transportée en $s'M_1R_1$ par rapport à la verticale R′S′ fixe de position ; ou, ce qui revient au même, la verticale R′S′ viendra en $r's'$ par rapport à l'onde OM′R′ ; son point G se trouvera en g, au point de rencontre de la verticale $r's'$ avec l'horizontale Gg ; et la molécule de liquide qui était en G se trouvera en G′, à la distance x de la verticale $r's'$, et à la distance y de l'horizontale Gg ; x, y étant les coordonnées de la molécule G′ par rapport aux axes ayant leur origine en g.

Maintenant, sur la verticale qui passe par le sommet de l'onde, et en G_1 à la même hauteur que le point G, c'est-à-dire à la profondeur p sous l'horizontale menée par R′, plaçons l'origine d'un autre système d'axes coordonnés qui se déplacent avec l'onde, c'est-à-dire qui aient le même mouvement de translation en direction horizontale ; l'axe des abscisses (X) sera horizontal et positif de gauche à droite ; l'axe des

ordonnées (y) sera vertical et positif de bas en haut : par rapport à ces axes les coordonnées du point G′ seront

$$\text{abscisse } L - Wt + x = X;$$
$$\text{ordonnée } y \text{ ou } Y$$

si le point correspond à $p = 0$.

La suite, à un instant donné, de tous les points ayant pour coordonnées courantes X, Y constitue la courbe de l'onde visible dans la position qu'elle occupe dans cet instant.

En général, l'ordonnée $y = gg'$ du point G′ correspond à l'abscisse $x = g'G'$ qui, à son tour, correspond au temps $t = \frac{g'E'}{W}$. Par suite, si à l'extrémité de l'abscisse

$$HG' = HE' - E'g' - g'G' = L - Wt + x = X,$$

qui correspond au même temps t que l'abscisse x, on porte l'ordonnée de la trajectoire du point

$$y = f(x),$$

on aura le lieu géométrique des positions que le point viendra prendre successivement par rapport à l'onde pendant tout le temps T; ou encore la courbe sur laquelle, à un instant donné, se trouveront tous les points situés dans les mêmes conditions de profondeur que le point que l'on considère; en d'autres termes, on aura la courbe qui représente la forme de l'onde dans l'intérieur de la masse liquide, ou plus simplement la courbe de l'onde interne,

$$y = F(L - Wt + x) = F(X),$$

correspondante à une profondeur déterminée p, et rapportée aux axes de coordonnées ayant leur origine en G_1.

En y faisant $p = 0$, ce qui entraîne $y = Y$, on aura la courbe de l'onde visible

$$Y = F'(X).$$

Or, l'observation montre que, dans le mouvement des ondes, les

déplacements des molécules dans la direction horizontale sont toujours très petits en comparaison de la demi-amplitude de l'onde et des espaces parcourus par celle-ci.

C'est pourquoi l'on peut négliger le terme x en comparaison des deux autres L et Wt, prendre simplement $X = L - Wt$ pour l'abscisse du point G', et écrire

$$y = F(L - Wt).$$

Les fonctions qui représentent la trajectoire du point et la courbe de l'onde interne sur laquelle il se trouve ont des valeurs égales pour des valeurs déterminées de x et de X correspondantes au même instant t; mais la première $y = f(x)$ est rapportée aux axes dont l'origine est en g, mobile par rapport à l'onde considérée comme fixe; tandis que l'autre $y = F(X)$ est rapportée aux axes dont l'origine est en G_1 fixe par rapport à l'onde qui se déplace.

On aura par conséquent encore

$$z = p + Y - y$$

8. Soient maintenant mn, pq les courbes de deux ondes internes consécutives, correspondantes respectivement aux profondeurs p et $p + dp$; la hauteur $z = mm'$ peut prendre deux accroissements divers selon que le temps varie, ou la profondeur.

Le premier accroissement $\frac{dz}{dX} dX$ se compose de deux termes, relatifs, l'un $cd = \frac{dy}{dX} dX$ à l'onde interne, l'autre $c'd' = \frac{dY}{dX} dX$ à l'onde visible; ils correspondent tous les deux à l'accroissement

$$mc = m'c' = dX = - W dt,$$

puisqu'on a la relation $X = L - Wt$.

Cet accroissement $\frac{dz}{dX} dX$ se rapporte à deux points divers m, d, qui se succèdent immédiatement à la distance horizontale dX sur la même onde, ou bien au même point m à l'intervalle de temps dt.

Le second accroissement $mp = \frac{dz}{dp} dp$ se rapporte à deux points m,

p, qui se suivent immédiatement au même instant sur la même verticale à l'intervalle dz en rapport avec l'accroissement dp.

A l'accroissement $\frac{dz}{dp}dp$, qui représente à un instant donné, ou bien à une abscisse donnée, l'intervalle en direction verticale de deux ondes internes consécutives, correspond l'accroissement mq qui représente, dans le même instant, l'intervalle des deux mêmes ondes en direction horizontale; ou encore représente la distance de deux points sur deux ondes internes consécutives, lesquels à un instant donné se trouvent à la même hauteur.

Appelons, pour abréger,

$d'z$ l'accroissement $mp = \frac{dz}{dp}dp$, afin de le distinguer de l'autre $\frac{dz}{dX}dX$ que l'on désignera simplement par dz;

$d'X$ l'accroissement mq, pour le distinguer de l'autre $mc = dX$.

9. Venons à l'examen de l'action produite par le déplacement de l'onde visible, et considérons un point quelconque G′ au-dessous de l'horizontale qui passe par le point le plus bas de l'onde.

Par l'effet de la gravité et de la réaction du fond, les molécules en H, G′, E′, sur la même horizontale, se trouveront d'abord respectivement soumises aux pressions hydrostatiques, qui ont pour mesure la hauteur des colonnes liquides OH, M′G′ et E′R′, si la densité du liquide est égale à l'unité, comme on le supposera, et comme cela arrive approximativement pour l'eau.

De plus, en vertu de l'égalité de pression en tous sens que possèdent les liquides, ces pressions s'exerceront aussi suivant l'horizontale HE′, de sorte que dans cette direction la molécule en G′ se trouvera en même temps soumise à la même pression M′G′ dans les deux sens opposés G′H et G′E′.

Or, si l'on considère deux molécules consécutives quelconques sur la même horizontale, à cause de la continuité et de l'incompressibilité du liquide, la pression analogue M′G′ à laquelle se trouve soumise chacune des deux molécules se transmettra à l'autre; les pressions d'une molécule vers l'autre étant opposées se détruiront réciproquement pour la partie commune à toutes les deux, et finalement l'une des molécules

poussera ou tirera l'autre avec son excès de pression et dans le sens de cet excès.

Ces excès de pression, par le même motif de la continuité et de l'incompressibilité du liquide, se transmettront d'une molécule à l'autre, de sorte qu'en dernier lieu la molécule en G′ se trouvera soumise au maximum de l'excès de pression qui puisse se déterminer sur l'horizontale HE′, et par conséquent se trouvera d'un côté soumise à l'excès de pression OH — G′M′, et de l'autre à l'excès de pression M′G′ — E′R′.

Toujours encore à cause de la propriété de l'égalité de pression dans tous les sens que les liquides possèdent, ces excès de pression s'exerceront tant en direction horizontale HE′ qu'en direction verticale G′M′.

En tout donc, la molécule en G′ se trouvera soumise dans le sens positif de l'axe des y à l'excès de pression

$$(OH - G'M') - (M'G' - E'R') = M'P' - (R'S' - M'P') = A - 2Y_M,$$

expression dans laquelle Y_M représente l'ordonnée de la courbe de l'onde visible correspondante à l'abscisse $L - Wt + x$, à laquelle ordonnée, comme on l'a déjà vu, on peut substituer l'ordonnée $Y_{D'}$ ou simplement Y du point D′ correspondant à l'abscisse $L - Wt$.

Alors l'excès de pression auquel se trouve soumise la molécule en G′ en direction verticale aura pour valeur $A - 2Y$, et représentera la *charge*, c'est-à-dire l'effort auquel la molécule obéit pour aller reprendre sa position de repos; ou bien encore l'effort qui, en ce point, tend à ramener le liquide à niveau

Il en sera de même pour tout autre point comme G″ de l'autre côté de la verticale qui passe par le sommet de l'onde, et comme la hauteur de l'onde, d'après ce qu'on a dit, peut être considérée comme la même des deux côtés de cette verticale, il s'ensuit que, pour toutes les molécules situées au-dessous de l'horizontale qui passe par le point le plus bas de l'onde, la charge à laquelle elles se trouveront soumises en direction verticale aura pour valeur $A - 2Y$.

De même, pour chaque molécule I′ située au-dessus de l'horizontale qui passe par le point le plus bas de l'onde, l'excès de pression auquel elle se trouvera soumise dans le sens positif de l'axe des y aura pour valeur

$$(OK - I'N') - N'B;$$

on retranche N′B, parce que, la pression produite dépendant uniquement de la colonne liquide sur la verticale qui passe par I′, la molécule est soumise par en haut à la pression I′N′, et par en bas au manque de pression I′B, puisque la colonne I′B se trouve sans contraste; en d'autres termes, le point I′, à cet égard, suivra les mouvements du point B, qui se trouve soumis à l'action de la colonne la plus grande.

Or

$$(OK - I'N') - N'B = Ok - BN' - N'B = A - 2Y,$$

c'est-à-dire la même expression que pour les points G′, G″.

Cette expression se réduit :

Pour $Y = \frac{A}{2}$ à..... 0,

Pour $Y = 0$ à..... $-A$,

Pour $Y = A$ à..... A.

10. En raisonnant d'une manière semblable, dans le sens positif de l'axe des x, la molécule en G′ est soumise à l'excès de pression

$$(OH - G'M') + (G'M' - E'R') = OH - E'R' = +A;$$

et, par analogie, la molécule en G″ sera soumise à l'excès de pression $-A$; ces excès de pression représentent la charge qui, en direction horizontale, tend à ramener les molécules à leur position de repos.

Si, au lieu des points comme G′ et G″ au-dessous de l'horizontale passant par R′, on considère les points comme I′ qui se trouvent au-dessus, ces points se trouveront soumis à l'excès de pression

$$OK - I'N' + N'I' - (-I'B) = OK + I'B = Ok = +A,$$

et à l'excès de pression $-A$ pour les points tels que I″, comme pour les points G′, G″.

11. Ces charges cependant se modifient à cause du mouvement.

Quand une onde passe, les molécules appartenant au même niveau, c'est-à-dire à la même couche horizontale très mince dans le liquide en repos, viennent l'une après l'autre prendre la même position par rap-

port à l'onde interne ou visible sur laquelle elles se disposent dans le mouvement, de sorte que cette onde se transporte parallèlement à elle-même en direction horizontale, tandis que les molécules, après le passage d'une onde entière, viennent se trouver à la même position qu'auparavant; c'est ainsi qu'a lieu le mouvement apparent du liquide.

L'onde avançant par un mouvement rectiligne horizontal, chaque point de sa courbe effleure successivement toutes les molécules des couches très minces contiguës; car, en s'élevant et s'abaissant, elles se portent continuellement contre cette courbe à son passage, pour se disposer à leur tour sur l'onde respective à laquelle elles appartiennent.

Par conséquent, chaque point de cette courbe dans son mouvement de translation exerce une action sur les molécules effleurées.

Si, après cela, on considère un temps très court, les molécules effleurées se trouveront comprises dans un intervalle horizontal égal au trajet horizontal du point de la courbe, car dans cet intervalle elles parcourent toutes très approximativement le même espace horizontal.

Par suite, chacune de ces molécules éprouvera, pendant un instant, l'action du point de la courbe, et s'il s'agit d'un temps très court, elle éprouvera en moyenne, pendant tout ce temps, une action qui aura pour mesure l'action individuelle du point divisée par une quantité proportionnelle à son trajet horizontal dans le même temps, parce que cette action individuelle, qui reste constante pendant ce temps, se fait sentir également, et par conséquent se répartit uniformément sur toutes les molécules comprises dans ce trajet, et cela quelle que soit la direction suivant laquelle s'exerce l'action.

Nous disons *quantité proportionnelle à son trajet horizontal,* parce que, dans un intervalle donné, le nombre des molécules effleurées varie suivant l'inclinaison de la tangente à la courbe de l'onde.

Or une courbe n'est autre chose qu'une suite de points; par conséquent, l'action qu'un arc élémentaire de l'onde exerce sur une molécule pendant tout le temps de son passage auprès d'elle sera égale à la somme de l'action moyenne de tous ses points, action moyenne qui se fait sentir sur toutes les molécules comprises dans un trajet égal à la projection horizontale de cet arc élémentaire, parce que dans cet espace de temps tous les points de cet arc élémentaire, et pas d'autres, passent auprès des molécules.

D'autre part, plus l'inclinaison de la tangente à la courbe est grande, et plus l'arc élémentaire de la courbe dans un intervalle donné devient grand; et le nombre de ses points augmente précisément comme pour les molécules en contact.

Par conséquent, l'action ressentie, dans une direction déterminée et à un instant quelconque, par une molécule pendant le passage de l'onde en contact, sera égale à l'action totale exercée dans cette direction par l'arc élémentaire qui, dans cet instant, passe auprès de la molécule, divisée par la projection horizontale du même arc, ou plus généralement divisée par la projection de l'arc élémentaire considéré sur la direction du mouvement de translation de la courbe qui exerce sa propre action sur les molécules effleurées.

Et comme ces arcs se suivent immédiatement sans interruption ni superposition, l'action de l'onde sur la molécule sera continue; en outre, elle aura toujours la même valeur, quelle que soit la longueur de l'arc, pourvu qu'il soit très petit, parce que son action totale aussi bien que la projection sur laquelle se répartit cette action lui sont proportionnelles.

12. D'après ce qui précède, l'excès de pression verticale auquel, dans leur ensemble, se trouvent soumises les molécules disposées le long d'un arc élémentaire quelconque de l'onde interne ou visible, ayant pour projection horizontale dX, aura pour valeur $(A - 2Y)\,dX$, et cette expression indiquera aussi l'action verticale de l'arc élémentaire sur les molécules en contact.

Ensuite, par l'effet du déplacement de l'onde, l'action verticale de l'arc élémentaire sur les molécules effleurées en un point quelconque aura pour valeur

$$\frac{(A - 2Y)\,dX}{dX} = A - 2Y,$$

c'est-à-dire sera égale à l'excès de pression verticale auquel sont soumises les molécules dans cette direction.

Horizontalement, chaque arc élémentaire d'onde de hauteur dy et de projection horizontale dX subira dans cette direction un excès de pression $A\,dy$, et pendant son déplacement, l'onde exercera sur les molécules en contact l'action $A\frac{dy}{dX}$, abstraction faite du signe.

L'action $A\frac{dy}{dX}$ s'exerce évidemment dans le même sens que l'excès de pression A, et par conséquent sera de même signe.

Or, les ondes internes doivent être comme l'onde visible, montantes et descendantes pendant les mêmes périodes; car, à cause de la prépondérance décisive de la composante verticale des forces sur la composante horizontale, ainsi que le révèle dans la nature la grande différence d'intensité des mouvements dans ces deux directions, cette composante verticale détermine principalement la forme des ondes.

D'autre part, comme la charge verticale a une valeur constante pour toutes les molécules situées au même instant sur la même verticale, l'allure générale des ondes doit être la même pour toutes, sauf la différence de leur grandeur qui se trouve en corrélation avec la plus ou moins grande réaction des molécules, selon les différents points de la masse liquide considérés.

Alors le $\frac{dy}{dX}$, dans la période montante, sera négatif, et *vice versa* sera positif dans la période descendante, c'est-à-dire se trouvera précisément de signe contraire à l'excès de pression A.

Par conséquent, l'action $A\frac{dy}{dX}$ et l'excès de pression A devant avoir le même signe, on devra, dans tous les cas, adopter $-A\frac{dy}{dX}$ pour expression de l'action horizontale des ondes sur les diverses molécules de la masse liquide.

La charge à laquelle se trouveront soumises toutes les molécules de la masse liquide en dépendance de la forme des ondes se trouvera donc modifiée de la manière suivante :

Dans la direction verticale $A - 2Y$;

Dans la direction horizontale $-A\frac{dy}{dX}$.

15. Après avoir ainsi tenu compte des causes inhérentes à la forme des ondes, pour le reste, chaque effet, comme on l'a déjà dit, étant proportionné à la cause qui le produit, et *vice versa*, on pourra regarder la force qui anime chaque molécule de la masse liquide par l'effet du déplacement de l'onde visible, comme proportionnelle aux susdites

charges modifiées, c'est-à-dire l'égaler à

$\alpha(A - 2Y)$ dans la direction verticale;

$-\alpha A \frac{dy}{dX}$ dans la direction horizontale.

La quantité α doit être la même pour les deux charges, car autrement le principe de l'égalité de pression dans tous les sens, dont elles sont déduites, ne se trouverait plus vérifié.

Cette quantité se déterminera d'après la condition que l'onde visible déduite des calculs ait la hauteur A observée, et qu'elle coïncide, dans chacun de ses points, avec la courbe de l'onde relevée, ou adoptée dans les tentatives de calcul.

14. Il est à remarquer qu'en se transmettant de la face verticale $d'z$ à la face horizontale $d'X$ d'un élément de liquide $d'z \times d'X$, les pressions exercées en direction verticale par les colonnes liquides OH et E'R' agissent toutes les deux dans un sens sur l'une des faces $d'X$, et dans le sens opposé sur l'autre, tandis que la colonne M'G', au contraire, agit dans le même sens sur toutes les deux.

Par contre, en direction horizontale, les colonnes OH et E'R' agissent l'une dans un sens et l'autre dans le sens opposé sur les deux faces $d'z$, et la colonne M'G', en transmettant la pression qui lui est due, agit dans un sens sur l'une des faces $d'z$ et dans le sens contraire sur l'autre.

Par conséquent, les colonnes liquides OH et E'R' tendent à comprimer l'élément en direction horizontale et à le dilater en direction verticale, et *vice versa* la colonne M'G', combinée avec la réaction du liquide qui se trouve au-dessous, tend à le comprimer en direction verticale et à le dilater en direction horizontale.

Par ces compressions et expansions, les tranches liquides verticales, dans lesquelles on peut imaginer divisée la masse liquide en repos, s'allongent et se raccourcissent verticalement pendant le passage de l'onde, et en correspondance s'amincissent et se gonflent horizontalement, et par suite se plient l'une sur l'autre, engendrant ainsi les divers mouvements des molécules.

15. Passant à la réaction des molécules, on a d'abord à observer

que, s'il n'intervient pas d'autres causes, tous les points de la masse liquide situés sur la même verticale devraient avoir, dans cette direction, la même vitesse, comme étant soumis à la même charge.

Au contraire, comme les faits le démontrent, l'agitation, qui n'est autre chose que du mouvement, diminue avec la profondeur, ce qui fait que ces points doivent avoir entre eux une vitesse verticale différente.

Quoi qu'il en soit, soit v la vitesse verticale à la profondeur z après le temps t, la vitesse dans la même direction et sur la même verticale, c'est-à-dire dans le même instant, à la profondeur $z + d'z$, sera

$$v + \frac{dv}{d'z} d'z :$$

la différence de ces vitesses, savoir la vitesse gagnée par le point inférieur par rapport au point supérieur, sera

$$\frac{dv}{d'z} d'z,$$

ou encore la colonne z aura, par rapport au point qui est au-dessous, la vitesse relative $-\frac{dv}{d'z} d'z$.

Avec cette vitesse relative, la colonne frappe le liquide qui est au-dessous d'elle ou bien l'aspire, et ainsi se produit cette mutuelle impulsion ou empêchement de mouvement qu'exercent les molécules, et qui forment leur réaction.

Pour la déterminer, il faut remarquer que, suivant la direction verticale, la colonne z, qui s'appuie sur la base $d'X$ et a comme elle la vitesse v, possède la quantité de mouvement $\frac{z\,d'X}{g} v$.

De même, la colonne $z + d'z$ possède la quantité de mouvement $\frac{d'X}{g}(z + d'z)\left(v + \frac{dv}{d'z} d'z\right)$, ou simplement $\frac{z\,d'X}{g}\left(v + \frac{dv}{d'z} d'z\right)$, parce que l'on peut négliger $d'z$ en comparaison de z.

Par conséquent, dans l'intervalle de sa hauteur $d'z$, l'élément de masse $\frac{d'X\,d'z}{g}$ se trouve avoir gagné dans l'unité de temps une quantité de mouvement égale à la différence des quantités de mouvement

communiquées respectivement à ses bases inférieure et supérieure, c'est-à-dire égale à

$$\frac{z\,d'\mathrm{X}}{g}\left(v+\frac{dv}{d'z}d'z\right)-\frac{z\,d'\mathrm{X}}{g}v=\frac{z\,d'\mathrm{X}}{g}\times\frac{dv}{d'z}d'z,$$

expression qui, rapportée à l'unité de masse de l'élément, donne

$$\frac{z\,d'\mathrm{X}}{g}\times\frac{dv}{d'z}d'z\times\frac{g}{d'\mathrm{X}\,d'z}=z\frac{dv}{d'z},$$

et représente la valeur de la force à laquelle se trouve soumis l'élément par cette cause. Mais le coefficient différentiel d'une fonction ne change pas par le changement de grandeur de l'accroissement que l'on donne à la variable, pourvu que cet accroissement reste très petit. Et comme la distance $d'z$ de deux ondes internes consécutives, qui à l'origine des temps se réduit à dp, peut se représenter par $k\,dp$, k étant fonction du temps seulement, on pourra substituer $\frac{dv}{dp}$ à $\frac{dv}{d'z}$, et de cette façon la réaction des molécules en direction verticale deviendra

$$z\frac{dv}{dp}.$$

16. La réaction des molécules en direction verticale a pour mesure la profondeur du point considéré dans l'endroit où il se trouve, multipliée par le coefficient différentiel de sa vitesse verticale par rapport à la profondeur.

Or, si l'on s'en tient à l'observation, la vitesse en direction verticale diminue à mesure que z augmente; par conséquent, à mesure que z augmente, la réaction des molécules croît d'un côté et diminue de l'autre.

D'autre part, la vitesse diminue avec la force actuelle, c'est-à-dire à mesure que diminue la résultante de toutes les forces, et comme la charge reste constante pour tous les points situés sur la même verticale, il advient en définitive que la réaction des molécules en direction verticale est opposée au mouvement et croît avec la profondeur, et le mouvement diminue en correspondance jusqu'à s'éteindre complètement.

17. Par analogie, pour la réaction des molécules en direction horizontale, si le même point situé à l'abscisse $L - X$ a dans cette direction la vitesse u, le point situé au même instant sur la même horizontale à l'abscisse $L - X + d'X$ aura dans cette direction la vitesse $u + \frac{du}{dX} d'X$, et la vitesse relative du second point, par rapport au premier, sera

$$\frac{du}{dX} d'X.$$

D'autre part, comme on l'a vu, de toutes les colonnes liquides qui agissent sur l'élément en direction horizontale, la colonne $M'G'$ est la seule qui agisse dans un sens sur l'une des faces $d'z$, et dans le sens opposé sur l'autre.

La colonne $M'G' = z$ est donc celle sans laquelle il n'y aurait pas de vitesse relative entre les deux points; par conséquent, la même colonne z qui règle la vitesse relative des faces $d'X$ de l'élément règle aussi la vitesse relative des autres faces $d'z$, en exerçant sur toutes la même pression z par unité superficielle.

Et comme la pression de la colonne z sur la face $d'z$ est $z\,d'z$, la réaction des molécules en direction horizontale rapportée à l'unité de masse aura une expression analogue à celle de la réaction en direction verticale,

$$\frac{du}{d'X} d'X \,.\, z\,d'z \frac{1}{d'X\,d'z} = z\frac{du}{d'X} = z\frac{du}{dX}.$$

III.

18. Les équations du mouvement seront donc, dans la direction verticale,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(A - 2Y) + z\frac{dv}{dp},$$

et dans la direction horizontale,

$$\frac{du}{dt} = -\alpha A\frac{dy}{dX} + z\frac{du}{dX}.$$

Dans ces expressions, il n'est fait aucune distinction sur l'amplitude des branches montante et descendante de l'onde, parce que, les équations du mouvement ayant pour toutes les deux la même forme, il n'y a pas de raison pour qu'une branche doive être différente de l'autre.

19. Il reste à exprimer la condition de continuité.

Évidemment, si le liquide est continu et incompressible, un quelconque de ses éléments changera bien successivement de forme suivant les diverses positions qu'il occupera pendant le passage de l'onde, mais il ne changera jamais de volume.

Or, un point situé à la distance $L - X$ de la verticale fixe R'E' dans le liquide en repos viendra se trouver à la distance $L - X + x$ de cette même verticale dans le liquide en mouvement, puisque le point s'est déplacé de la quantité $+x$ de sa propre verticale.

De même, un point placé à la distance

$$L - X + \frac{d(L - X)}{dX} dX = L - X - dX,$$

dans le liquide en repos, se trouvera à la distance

$$L - X + x + \frac{d(L - X + x)}{dX} dX = L - X + x - dX + \frac{dx}{dX} dX,$$

dans le liquide en mouvement.

Par conséquent, la distance horizontale des deux points, qui dans le liquide en repos était

$$(L - X - dX) - (L - X) = - dX,$$

sera, dans le liquide en mouvement,

$$\left(L - X + x - dX + \frac{dx}{dX} dX\right) - (L - X + x) = - dX + \frac{dx}{dX} dX;$$

c'est-à-dire que, dans le passage du repos au mouvement, la distance

dX des deux points se trouvera augmentée de la quantité $+\frac{dx}{dX}dX$, ce qui du reste est évident.

Avec les éléments de largeur $-dX$ (abstraction faite du signe) pendant le repos, et $-dX+\frac{dx}{dX}dX$ dans le mouvement, le liquide restera sans intervalles ni superpositions dans la direction horizontale : par conséquent, pour examiner la condition de continuité, on adoptera $-dX+\frac{dx}{dX}dX$ pour largeur des éléments dans le liquide en mouvement.

Le liquide restera de même sans intervalles ni superpositions dans la direction verticale pendant le mouvement, si l'on a égard aux éléments compris entre deux ondes consécutives, correspondantes respectivement aux profondeurs p et $p+dp$.

Alors la hauteur d'un élément quelconque sera le $d'z$ correspondant à l'abscisse $L-X+x$, hauteur à laquelle, d'après ce qu'on a vu, on peut substituer celle qui correspond à l'abscisse $L-X$, savoir simplement $d'z$.

Si donc on appelle E le volume d'un élément quelconque mis en mouvement, l'on aura

$$E=\left(-dX+\frac{dx}{dX}dX\right)d'z=\left(-1+\frac{dx}{dX}\right)dX\,d'z.$$

Mais afin que la condition de continuité et d'incompressibilité soit satisfaite, il faut que ce volume soit constant à chaque temps; il faudra donc en égaler à zéro la différentielle par rapport au temps, ce qui donne

$$\frac{dE}{dt}dt=\frac{dE}{dX}dX=\frac{d^2x}{dX^2}dX^2\frac{dz}{dp}dp-\left(1-\frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX}dX^2dp=0,$$

et, en ôtant les facteurs communs,

$$\frac{d^2x}{dX^2}\frac{dz}{dp}-\left(1-\frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX}=0,$$

équation qui exprime la condition voulue.

20. D'après ce qui a été dit jusqu'ici, les équations du mouvement des divers points de la masse liquide seront

$$\frac{du}{dt} = -\alpha A \frac{dy}{dX} + z\frac{du}{dX},$$
$$\frac{dv}{dt} = \alpha(A - 2Y) + z\frac{dv}{dp},$$
$$z = p + Y - y,$$
$$X = L - Wt,$$
$$\frac{d^2x}{dX^2}\frac{dz}{dp} - \left(1 - \frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX} = 0,$$

auxquelles équations il faut ajouter les deux équations générales suivantes :

$$dx = u\,dt,$$
$$dy = v\,dt.$$

Pour chaque point on a donc sept équations entre huit variables, x, y, z, u, v, t, X, Y et la quantité p; en en éliminant six, on arrivera à une relation entre les deux autres variables, la profondeur p et les données de l'onde, savoir sa hauteur, son amplitude et sa vitesse.

Le mouvement sera donc parfaitement déterminé en fonction de ces données et de la profondeur du point que l'on veut considérer, pourvu qu'on donne la profondeur du fond, comme on le verra plus loin.

21. Mais, comme il est facile de le voir, la réduction des sept équations à une seule, quand même cela serait possible, serait si difficile et conduirait à des résultats si compliqués, qu'il faudrait renoncer à toute idée de poursuivre l'opération par ce moyen.

Pour arriver à la solution du problème, ce sera donc le cas de la chercher approximativement par la méthode dite de *fausse position*, en commençant par attribuer à quelques-unes des variables des expressions telles qu'elles concordent assez bien avec la réalité des choses.

Dans ce sens, considérant que le mouvement des molécules est oscillatoire, et que le moyen le plus convenable de le représenter est d'employer une fonction de sinus et de cosinus, avec la combinaison desquels

on arrive à exprimer toute sorte d'oscillation, on peut d'abord supposer que la courbe de l'onde visible soit une sinusoïde, comme du reste l'a considéré Laplace quand il a donné les lois de propagation horizontale d'une onde mince suivant la théorie du mouvement orbitaire.

L'équation de la sinusoïde est la fonction la plus simple dont le $\frac{dY}{dX}$ se réduise à zéro aussi bien pour $X = 0$ que pour $X = L$, comme en effet cela arrive dans la nature, où la vitesse verticale est nulle au sommet et au point le plus bas de l'onde; par conséquent, quelle que soit la vraie courbe de l'onde, la sinusoïde s'en approchera au moins dans le voisinage de ces deux points.

D'ailleurs, si l'on observe les ondes quand a cessé l'action des forces qui les ont produites, et quand elles ne se trouvent pas modifiées, sensiblement au moins, par la réaction du fond ou des rives, ou par le croisement d'autres ondes provenant d'une direction différente; en d'autres termes, si les ondes ne sont en aucune façon dérangées, précisément comme on le suppose dans la question dont il s'agit, dans ces conditions, on voit que leur forme concorde assez bien avec celle de la sinusoïde.

L'équation de la courbe de l'onde visible serait donc

$$Y = \frac{A}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right).$$

Après cela, si l'on examine les expressions de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, qui représentent la valeur de la force actuelle qui sollicite un point quelconque dans les deux directions horizontale et verticale, on voit qu'elles ont la même forme pour tous les points.

En outre, l'observation montre que l'agitation décroît à mesure que la profondeur augmente; de sorte que les forces actuelles qui les produisent diminuent aussi quand z croît, jusqu'à devenir nulles à la limite de l'agitation.

Enfin, la charge à laquelle sont soumises les molécules dans la direction horizontale change pour toutes de signe sur les verticales qui passent par le sommet et par les points le plus bas de l'onde.

Tout cela revient à dire que les ondes internes conservent une cer-

taine ressemblance avec l'onde externe et qu'elles se trouvent toutes comprises entre celle-ci et une ligne droite horizontale qui représente l'onde interne à la profondeur où l'agitation du liquide ne se fait plus sentir.

Par conséquent, si l'on appelle a la hauteur de l'onde interne correspondante à la profondeur p, on peut admettre que l'expression de y soit de la même forme que celle de Y, dans laquelle on substitue seulement a à A, c'est-à dire soit

$$y = \frac{a}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{\lambda}{L}\right).$$

Avec ces valeurs de Y et de y, celle de z sera

$$z = p + \frac{\lambda - a}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{\lambda}{L}\right),$$

expression qui, en ce qui concerne les erreurs commises sur Y et y, n'en contient que la différence.

22. Si de ces expressions on tire les valeurs des divers facteurs qui entrent dans les équations du mouvement, on a

$$\begin{aligned}
A - 2Y &= -A\cos\pi\frac{\lambda}{L},\\
\frac{dy}{d\lambda} &= -\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{\lambda}{L},\\
v = \frac{dy}{dt} &= -W\frac{dy}{d\lambda} = W\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{\lambda}{L},\\
\frac{dv}{dp} &= W\frac{da}{2dp}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{\lambda}{L};
\end{aligned}$$

et les équations du mouvement deviendront

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \alpha A\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{\lambda}{L} + \frac{\lambda - a}{2}\left(\frac{2p}{\lambda - a} + 1 + \cos\pi\frac{\lambda}{L}\right)\frac{du}{d\lambda},\\
\frac{dv}{dt} &= \alpha A\cos\pi\frac{\lambda}{L} + W\frac{\lambda - a}{2}\left(\frac{2p}{\lambda - a} + 1 + \cos\pi\frac{\lambda}{L}\right)\frac{da}{2dp}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{\lambda}{L};
\end{aligned}$$

expressions dans lesquelles $dt = -\frac{dX}{W}$; on en déduit u et v, pour des profondeurs déterminées, exprimés au moyen de la seule variable X.

25. En ce qui dépend des lignes trigonométriques, si l'on divise l'amplitude de l'onde en quatre intervalles égaux à partir de $X = L$ jusqu'à $X = -L$, le facteur $\sin\pi\frac{X}{L}$ sera positif dans le premier et le deuxième intervalle, et négatif dans le troisième et le quatrième : $\cos\pi\frac{X}{L}$ sera au contraire positif dans le deuxième et le troisième, et négatif dans le premier et le quatrième.

En conséquence, en ce qui regarde le déplacement de l'onde visible, action qui, en déterminant le mouvement, prédomine sur la réaction des molécules, qui ne fait que la modifier, en direction horizontale, cette action sera positive dans le premier et le deuxième intervalle, et négative dans le troisième et le quatrième. Dans la direction verticale, au contraire, cette action sera positive dans le premier et le quatrième intervalle, et négative dans le deuxième et le troisième.

En d'autres termes, $\frac{du}{dt}$, savoir la force actuelle qui produit le mouvement en direction horizontale, de positif devient négatif en passant de la période montante de l'onde à la période descendante, dans laquelle période X est négative; en outre, sa valeur est nulle, c'est-à-dire, la vitesse dans la direction horizontale est un maximum ou un minimum sur les verticales qui passent par $X = L$ et $X = 0$, c'est-à-dire par les points les plus bas et par le sommet de l'onde.

Et comme, dans les points voisins de $X = L$, l'abscisse X diminue quand le temps croît, et $\sin\pi\frac{X}{L}$ de négatif devient positif, par cette raison, u aura une valeur minimum, et *vice versa* elle aura une valeur maximum dans le voisinage de $X = 0$, parce que, X diminuant, $\sin\pi\frac{X}{L}$ de positif devient négatif.

Le $\frac{dv}{dt}$, au contraire, de positif devient négatif, en passant du premier au deuxième intervalle, et *vice versa,* de négatif devient positif, en passant du troisième au quatrième; dans ces passages, il devient

nul, ce qui revient à dire que la vitesse en direction verticale est un maximum ou un minimum sur les verticales qui passent par le milieu des demi-amplitudes de l'onde, et sera un maximum pour $X = \frac{L}{2}$, et un minimum pour $X = -\frac{L}{2}$.

En outre, dans le trajet d'une onde entière, les accroissements du et dv passent symétriquement par des valeurs égales et de signes contraires.

Tout cela explique que le mouvement des molécules est orbitaire, et qu'à un maximum ou minimum de vitesse dans une direction correspond une vitesse nulle dans l'autre.

Quant à la réaction des molécules, il faut remarquer d'abord que, à cause de $dX = -Wdt$, on a $\frac{du}{dX} = -\frac{du}{Wdt}$; et le terme qui le contient comme facteur dans l'expression de $\frac{du}{dt}$ deviendra de signe contraire à $\frac{du}{dt}$, c'est-à-dire qu'il deviendra négatif dans le premier et le deuxième intervalle, et restera positif dans le troisième et le quatrième.

En second lieu, la hauteur a de l'onde interne, d'après ce que l'on a vu, diminue à mesure que p augmente, de sorte que $\frac{da}{dp}$ sera toujours négatif, et le terme qui le contient comme facteur dans l'expression de $\frac{dv}{dt}$, à cause aussi de l'autre facteur $\sin\pi\frac{X}{L}$, deviendra négatif dans le premier et le deuxième intervalle, et restera positif dans le troisième et le quatrième.

En d'autres termes, aussi bien dans la direction horizontale que dans la verticale, la réaction des molécules sera toujours négative pendant la période montante de l'onde, et positive, au contraire, dans la période descendante, comme du reste on pouvait le prévoir en observant le mode suivant lequel se comportent les tranches verticales et horizontales du liquide; c'est-à-dire, comment elles s'allongent ou se raccourcissent, et quel est l'effet produit par leur allongement et leur raccourcissement.

IV.

24. Du moment que ces équations subsistent pour une valeur quelconque de z, elles subsisteront encore pour les molécules à la sur-

face du liquide, pour lesquelles $z = 0$; et dans ce cas elles deviendront

$$\frac{dU}{dX} = -\frac{\alpha}{W}\frac{A^2}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$

$$\frac{dV}{dX} = \frac{\alpha}{W}A\cos\pi\frac{X}{L}.$$

En les intégrant et en observant que

$$U = \frac{dx}{dt} = -W\frac{dx}{dX} \quad \text{et} \quad V = \frac{dY}{dt} = -W\frac{dY}{dX},$$

on aura, pour la première,

$$U = \frac{\alpha}{W}\frac{A^2}{2}\cos\pi\frac{X}{L} + \text{const.};$$

dans cette équation, pour

$$X = \frac{L}{2}, \quad U = 0, \quad \text{const.} = 0,$$

$$\frac{dx}{dX} = -\frac{\alpha}{W^2}\frac{A^2}{2}\cos\pi\frac{X}{L};$$

$$x = -\frac{\alpha}{W}\frac{A^2}{2}\frac{L}{\pi}\sin\pi\frac{X}{L} + \text{const.};$$

dans celle-ci,

$$X = L, \quad x = 0, \quad \text{const.} = 0.$$

Pour la seconde équation on aura

$$V = \frac{\alpha}{W}A\frac{}{\pi}\sin\pi\frac{X}{L} + \text{const.};$$

où pour

$$X = L, \quad V = 0, \quad \text{const.} = 0$$

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha}{W^2}A\frac{L}{\pi}\sin\pi\frac{X}{L};$$

$$Y = \frac{\alpha}{W^2}A\frac{L^2}{\pi^2}\cos\pi\frac{X}{L} + \text{const.},$$

et puisque pour

$$X = L, \quad Y = 0, \quad \text{const.} = +\frac{\alpha}{W^2}A\frac{L^2}{\pi^2};$$

et alors

$$Y = \frac{\alpha}{W^2} A \frac{L^2}{\pi^2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right).$$

Mais pour

$$X = 0 \ldots Y = A,$$

par suite

$$\alpha = \frac{W^2}{2}\frac{\pi^2}{L^2};$$

et l'on aura définitivement

$$U = W\frac{A^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L},$$

$$x = -\frac{A^2}{4}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$

$$V = W\frac{A}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$

$$Y = \frac{A}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right),$$

comme l'équation dont on était parti.

25. La valeur de la quantité $\alpha = \frac{W^2}{2}\frac{\pi^2}{L^2}$ est caractéristique; on peut la considérer comme la moitié de la force vive de l'unité de masse avec la vitesse W de propagation des ondes, divisée par le carré du rayon du cercle qui a pour circonférence l'amplitude 2L de l'onde, le long de laquelle les molécules accomplissent leur révolution.

Il était, du reste, bien naturel que la valeur de α dût être formée par ces éléments, car, en évaluant les charges et leurs modifications, on avait déjà bien tenu compte des dimensions en hauteur de l'onde visible et de la forme des ondes en général, mais il manquait encore d'introduire dans le calcul leur amplitude et leur vitesse, choses qui doivent exercer une influence bien décisive sur l'intensité due au déplacement de l'onde visible.

En outre, le produit de la quantité α ainsi obtenue, par chacune des deux charges trouvées plus haut, constitue une vraie force, puisqu'il en résulte la moitié d'une force vive divisée par un espace linéaire, et multipliée par le rapport de deux lignes, dont le numérateur est la charge. La proportionnalité de α aux forces qui représentent l'action produite par le déplacement de l'onde visible est donc admissible.

26. Si l'on passe maintenant aux molécules dans l'intérieur de la masse liquide, l'équation de leur mouvement dans la direction verticale deviendra, d'après la valeur trouvée de α,

$$\frac{dv}{dX} = W\frac{A}{2}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L} - \frac{A-a}{2}\left(\frac{2p}{A-a} + 1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right)\frac{da}{2dp}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L}.$$

En intégrant, on aura

$$\begin{aligned} v = {} & W\frac{A}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L} + \frac{da}{2dp}p\cos\pi\frac{X}{L} \\ & + \frac{A-a}{2}\frac{da}{2dp}\cos\pi\frac{X}{L} + \frac{A-a}{2}\frac{da}{2dp}\frac{1}{2}\cos^2\pi\frac{X}{L} + \text{const.} \end{aligned}$$

Pour $X = L$, $v = 0$; par suite

$$\text{const.} = +\frac{da}{2dp}p + \frac{A-a}{2}\frac{da}{2dp} - \frac{A-a}{2}\frac{da}{2dp}\frac{1}{2},$$

et, à cause des relations

$$v = \frac{dy}{dt} = -W\frac{dy}{dX},$$

et

$$1 - \cos^2\pi\frac{X}{L} = \sin^2\pi\frac{X}{L} = \frac{1 - \cos 2\pi\frac{X}{L}}{2},$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dX} = {} & -\frac{A}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L} - \frac{da}{2dp}\frac{p}{W}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right) \\ & - \frac{A-a}{2W}\frac{da}{2dp}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right) + \frac{1}{4W}\frac{A-a}{2}\frac{da}{2dp}\left(1 - \cos 2\pi\frac{X}{L}\right). \end{aligned}$$

En intégrant,

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{A}{2}\cos\pi\frac{X}{L} - \frac{da}{2Wdp}\left(p + \frac{A-a}{2}\right)X - \frac{da}{2Wdp}\left(p + \frac{A-a}{2}\right)\frac{L}{\pi}\sin\pi\frac{X}{L} \\ & + \frac{1}{4W}\frac{A-a}{2}\frac{da}{2dp}\left(X - \frac{L}{2\pi}\sin 2\pi\frac{X}{L}\right) + \text{const.} \end{aligned}$$

Pour $X = L$, $y = 0$; par suite,

$$\text{const.} = +\frac{A}{2} + \frac{da}{2W\,dp}\left(p + \frac{A-a}{2}\right)L = \frac{1}{4W}\frac{A-a}{2} + \frac{da}{2dp}L,$$

et par conséquent, en réduisant,

$$y = \frac{A}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right) + \frac{da}{2W\,dp}\left(p + \frac{3}{4}\frac{A-a}{2}\right)(L - X)$$
$$- \frac{da}{2W\,dp}\left(p + \frac{A-a}{2}\right)\frac{L}{\pi}\sin\pi\frac{X}{L} - \frac{1}{4W}\frac{A-a}{2} - \frac{da}{2dp}\frac{L}{2\pi}\sin 2\pi\frac{X}{L}.$$

Mais, pour $X = 0$, on doit avoir $y = a$; par conséquent,

$$a = A + \frac{da}{dp}\left[p + \frac{3}{8}(A-a)\right]\frac{L}{2W},$$

d'où

$$\frac{d(A-a)}{A-a} = \frac{2W}{L}\frac{dp}{p + \frac{3}{8}(A-a)},$$

équation différentielle homogène; pour l'intégrer, il suffira de faire

$$(A-a) = \eta p,$$

d'où

$$d(A-a) = p\,d\eta + \eta\,dp.$$

En substituant ces valeurs et en réduisant, on aura successivement

$$\frac{dp}{p} = \frac{\left(1 - \frac{3}{8}\eta\right)d\eta}{\eta\left(\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta\right)} = -\frac{d\eta}{\eta} + \frac{2W}{L}\frac{d\eta}{\eta\left(\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta\right)}$$
$$= -\frac{d\eta}{\eta} + \frac{2W}{2W - L}\left(\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta} + \frac{1}{\eta}\right)d\eta$$
$$= \frac{L}{2W - L}\frac{d\eta}{\eta} - \frac{2W}{2W - L}\frac{d\left(\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta\right)}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta}.$$

En intégrant, on aura

$$\frac{2W - L}{L} \log p = \log \eta - \frac{2W}{L} \log\left(\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta\right) + \text{const.};$$

passant aux nombres, substituant à η sa valeur et réduisant, on obtient

$$A - a \text{ const.} = p^{\frac{2W}{L}} \left(\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A - a}{p}\right)^{\frac{2W}{L}}.$$

Pour la détermination de la constante, il faut remarquer que, tant qu'il y a mouvement, il y a aussi réaction des molécules, et *vice versa*.

Or, si grande que soit la profondeur, la vitesse pourra bien devenir très faible, mais elle ne pourra jamais s'éteindre complètement, parce que le coefficient différentiel de la vitesse verticale par rapport à la profondeur, qui constitue l'autre facteur de la réaction des molécules, ne peut jamais se réduire à zéro, attendu que $\frac{dv}{dp} = 0$ est le symbole distinctif d'un maximum ou d'un minimum de vitesse, dont il n'est pas question ici, et non pas d'une vitesse nulle.

Du reste, quelle que soit la profondeur du liquide, chacune de ses molécules est soumise à l'excès de pression $\pm A$ en direction horizontale, et $A - 2Y$ en direction verticale; l'effet de ces forces est bien paralysé plus ou moins par la réaction des molécules en mouvement, mais il ne peut pas rester entièrement détruit, parce qu'il n'y a pas de réaction là où il n'y a pas mouvement.

Donc le mouvement ne cessera qu'à des profondeurs infinies, pourvu que s'y prête l'extension des colonnes liquides.

En réalité cependant, le mouvement s'arrête au fond sur lequel repose le liquide, car là, à cause du manque d'élasticité, à chaque instant la composante des forces normale à la surface du fond sera détruite; les molécules qui y sont en contact ne s'en détacheront pas, et la hauteur de l'onde interne y sera nulle.

Par conséquent, si P représente la profondeur du fond au-dessous du liquide, la constante devra être telle, que pour $p = P$ on ait $a = 0$, et l'on aura par conséquent

$$A \text{ const.} = P^{\frac{2W}{L}} \left(\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A}{P}\right)^{\frac{2W}{L}},$$

d'où

$$a = A\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2W}{L}}\left(\frac{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A - a}{p}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A}{P}}\right)\right].$$

Pour $p = 0$, le rapport $\frac{A - a}{p}$ prend la valeur $\frac{0}{0}$, qui se réduit à $\frac{8}{3}\frac{2W}{L}$, en le tirant de l'expression de $\frac{d(A - a)}{dp}$, savoir du rapport des différentielles du numérateur et du dénominateur.

Par conséquent, la quantité $\frac{3}{8}\frac{A}{p} - \frac{a}{p}$ varie entre $\frac{3}{8}\frac{A}{P}$ et $\frac{2W}{L}$.

Quant à la valeur de $\frac{A}{P}$, l'observation montre que l'onde se brise quand elle arrive sur des profondeurs à peu près égales à sa propre hauteur; ceci revient à dire que, par défaut de profondeur, elle doit avoir ressenti déjà des perturbations avant d'arriver à ce point; en d'autres termes, pour se développer dans des conditions normales, comme on le suppose dans la présente question, l'onde a besoin de profondeurs suffisantes, plus grandes que A.

A cause de cela, $\frac{A}{P}$ sera une fraction d'autant plus petite que P sera plus grand, et ses limites extrêmes seront 0 et 1.

La valeur de $\frac{2W}{L}$ ensuite, comme on le verra plus loin, reste comprise entre les limites $\frac{1}{5}$ et $\frac{3}{4}$ environ.

A l'aide de toutes ces valeurs limites, on arrive à reconnaître que le facteur $\left(\frac{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A - a}{p}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A}{P}}\right)$ est près de l'unité, toutes les fois qu'il s'agit de points situés à une certaine distance de la surface du liquide, pour lesquels $\frac{A - a}{p}$ est proche de son minimum.

Ce même facteur est encore voisin de l'unité, oscillant entre 0,851 et 1,250, quand $\frac{2W}{L}$ est près de son minimum, quand même $\frac{A - a}{p}$ serait, au contraire, voisin de son maximum.

Enfin, ce n'est que dans les cas d'ondes très rapides et de peu d'amplitude, et de points situés à de très petites profondeurs, que ce rapport acquiert une certaine grandeur, de 1,60 à 4,00 tout au plus, selon que $\frac{\lambda}{P}$ a une valeur maxima ou minima.

Si l'on considère cependant que ce facteur a un exposant fractionnaire, de sorte que sa valeur se rapproche encore davantage de l'unité, et, d'autre part, que, quand il s'agit de points à une profondeur très petite, pour lesquels ce facteur s'écarte davantage de l'unité, l'autre facteur $\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2W}{L}}$ sera faible, leur produit sera faible aussi, et il n'y aura pas alors une grande différence à prendre pour $\left(\frac{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A-a}{p}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\frac{A}{P}}\right)^{\frac{2W}{L}}$ une valeur approchée.

Par toutes ces raisons, en pratique, on pourra le considérer comme égal à 1, et poser

$$a = A\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2W}{L}}\right].$$

Cette expression simple de a se déduit immédiatement de l'équation différentielle originaire, dans laquelle on néglige la quantité $\frac{3}{8}(A - a)$, qui, dans la plus grande partie des cas, est très petite en comparaison de p.

27. Des données obtenues sur les ondes mesurées, on déduit que le rapport $\frac{2W}{L}$ varie de $\frac{1}{5}$ à $\frac{3}{4}$ environ, et généralement reste compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que les décroissements de a varient, suivant les cas, comme les racines cubiques ou carrées du rapport $\frac{p}{P}$.

Cela montre comment, même dans le cas des plus grandes valeurs de $\frac{2W}{L}$, la valeur de a décroît tout d'abord rapidement de manière à se réduire considérablement à peu de distance de la surface du liquide; puis, cette même valeur décroît de moins en moins rapidement, pour

se maintenir à peu près constante jusqu'à de très grandes profondeurs, s'il en existe.

28. Ayant ainsi obtenu les valeurs de a et de $\frac{da}{dp}$ en fonction de p, on peut les substituer dans les expressions de v et y pour en tirer les valeurs correspondantes à des valeurs déterminées de X.

On peut aussi les substituer dans les équations du mouvement en direction horizontale, pour en tirer les valeurs de u et de x après avoir exécuté les intégrations nécessaires.

Mais le calcul deviendra plus simple et plus exact en même temps, si, à l'action du déplacement de l'onde visible et à la réaction des molécules, on substitue la force actuelle capable par elle seule de produire le même mouvement, c'est-à-dire substituer la force

$$-\frac{\alpha}{W}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L} = -W\frac{a^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}$$

en direction horizontale, et

$$\frac{\alpha}{W}a\cos\pi\frac{X}{L} = W\frac{a}{2}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L}$$

en direction verticale, pareillement à ce qui arrive pour l'onde visible, pour laquelle la réaction des molécules est nulle.

Alors il suffira de substituer a à A dans les expressions trouvées plus haut pour les molécules à la surface du liquide, et ainsi l'on aura

$$u = W\frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L},$$

$$x = -\frac{a^2}{4}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$

$$v = W\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$

$$y = \frac{a}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right).$$

Ces valeurs démontrent que le mouvement en direction horizontale est proportionnel au carré de la hauteur de l'onde sur laquelle se trouve

la molecule considérée : en direction verticale il est simplement proportionnel à la première puissance de cette même hauteur.

Les vitesses suivront donc, dans un certain rapport, la loi de variation de a.

29. On pourrait aussi obtenir la valeur de x en intégrant l'équation qui exprime la continuité et l'incompressibilité du liquide.

Mais, à part les difficultés que l'on pourrait rencontrer dans l'opération, il faut remarquer que, du moment qu'il faut renoncer à une des équations originaires à cause de la nouvelle relation introduite en se donnant les expressions de Y et y, il est préférable de s'en tenir aux équations du mouvement pour calculer la valeur de x, parce qu'elles la donnent en rapport avec la force horizontale, ce qu'il importe précisément d'obtenir.

Dès lors, l'équation de continuité ne se trouvera plus parfaitement satisfaite, et la différentielle du volume de l'élément par rapport au temps, d'où l'on a obtenu cette équation, fera connaître l'erreur provenant des valeurs de y et de x obtenues comme il a été dit plus haut, savoir l'excès ou le défaut de volume que l'élément présente en comparaison du volume qu'il devrait avoir dans chaque point.

Le coefficient différentiel

$$\frac{dE}{dX} = \left[\frac{d^2x}{dX^2}\frac{dz}{dp} - \left(1 - \frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX}\right] dX\,dp$$

se trouve exprimé au moyen du volume absolu $dX\,dp$.

Comme il importe que ce coefficient soit exprimé par rapport au volume (avec son propre signe) que l'élément a dans la position même où il se trouve, il suffira de multiplier et de diviser en même temps $dX\,dp$ par $(-dX + dx)\,d'z$.

On obtient

$$\begin{aligned} dX\,dp\,\frac{-dX + dx}{-dX + dx}\frac{d'z}{d'z} &= -\frac{dX}{dX - dx}\frac{dp}{d'z}(-dX + dx)\,d'z \\ &= -\frac{dX}{dX - dx}\frac{dp}{\frac{dz}{dp}\,dp}(-dX + dx)\,d'z \\ &= -\frac{dp}{dz}(-dX + dx)\,d'z, \end{aligned}$$

en observant que le rapport $\frac{dX}{dX - dx}$ est très approximativement égal à l'unité.

Par conséquent, on aura

$$\frac{dE}{dX} = \left[\frac{d^2x}{dX^2} - \left(1 - \frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX}\frac{dp}{dz}\right] \cdot dX + dx \cdot d^2z.$$

Le coefficient

$$\delta = \frac{d^2x}{dX^2} - \left(1 - \frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX}\frac{dp}{dz}$$

indique le degré de grandeur de l'erreur, et offre le moyen de calculer de combien un côté de l'élément se trouve plus allongé ou plus raccourci qu'il ne devrait l'être au point où il se trouve, quand on donne l'allongement ou le raccourcissement de l'autre côté.

En y substituant leurs valeurs à chacune des quantités, c'est-à-dire

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2\frac{dp}{da}}{2\frac{dp}{da} - 1 - \cos\pi\frac{X}{L}},$$

$$\frac{d^2z}{dp\,dX} = \frac{\pi}{L}\frac{da}{2\,dp}\sin\pi\frac{X}{L},$$

$$\frac{dx}{dX} = -\frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L},$$

et

$$\frac{d^2x}{dX^2} = \frac{a^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L},$$

on obtient

$$\delta = \frac{a^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L} - \frac{\pi}{L}\frac{1 + \frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L}}{2\frac{dp}{da} - 1 - \cos\pi\frac{X}{L}}\sin\pi\frac{X}{L},$$

et puisque

$$-\frac{a^2}{4}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L} = x,$$

$$2\frac{dp}{da} = -\frac{L}{XW}\frac{P^{\frac{2W}{L}}}{p^{\frac{2W}{L}-1}} = -\frac{L}{XW}P^{\frac{2W}{L}}p^{1-\frac{2W}{L}},$$

on aura

$$\delta = \frac{\pi^2}{L^2} x + \frac{\pi}{L} \frac{\sin \pi \frac{X}{L} - \frac{\pi}{L} x \cos \pi \frac{X}{L}}{\frac{L}{AW} P^{1-\frac{2W}{L}} p^{\frac{1}{2}-\frac{2W}{L}} + 1 + \cos \pi \frac{X}{L}}.$$

Pour $X = L$ et $X = 0$, on a $\delta = 0$; la condition de continuité est donc toujours parfaitement satisfaite sur les verticales qui passent par les points les plus bas et par le sommet de l'onde.

Pour $X = \frac{L}{2}$, δ prend la valeur maxima

$$\delta' = \frac{a^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} + \frac{\pi}{L} \frac{AW}{LP^{1-\frac{2W}{L}} p^{1-\frac{2W}{L}} + AW}.$$

A mesure que p augmente, cette valeur diminue, et d'autant moins rapidement que p est plus grand; par conséquent, à son tour, elle a un maximum qui correspond à $p = 0$, et dont la valeur est

$$\delta'_1 = \frac{A^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} + \frac{\pi}{L};$$

c'est la limite extrême de l'erreur.

Pour $p = P$, la valeur de δ' devrait être nulle, parce que là la hauteur de l'onde interne est égale à zéro; au contraire, elle devient

$$\delta'_2 = \frac{\pi}{L} \frac{AW}{LP + AW}.$$

Cette différence, qui provient de ce qu'on a posé $\frac{dX}{dX + dx} = 1$, fait voir que la véritable erreur sera encore plus faible que celle que l'on a trouvée.

Eu égard à la petitesse de A, de W et de π par rapport à L, on voit que la valeur de δ' sera très petite, pour peu que l'onde atteigne une certaine amplitude 2L; elle sera, en outre, d'autant plus petite, que l'onde se développera sur des profondeurs d'une certaine grandeur.

Dans le cas particulier qui sera traité dans la suite, on a

Pour $p = 0$	δ'_1	0,0378,
Pour $p = 1^m$	δ'	0,0035.

c'est-à-dire déjà moins de $\frac{1}{10}$ de δ'_1,

$$\text{Pour } p = \text{P} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \delta'_2 = 0{,}00001\,4.$$

Considérant en outre que l'erreur varie entre zéro et le maximum relatif δ', et d'un autre côté que l'erreur calculée est plus grande que l'erreur réelle, on doit conclure que, avec les valeurs de x et de y qu'on a prises, la condition de continuité est suffisamment bien satisfaite pour les ondes d'une certaine amplitude, qui sont précisément celles qui intéressent davantage l'ingénieur.

Et, quand même, pour les petites ondes, le coefficient δ' serait plus élevé, les mouvements des molécules sont alors si faibles, surtout en direction horizontale, qu'au point de vue absolu, dans les cas ordinaires de la pratique, on pourra encore conserver les mêmes valeurs de y et de x, qui, à cause de cela, peuvent être adoptées dans tous les cas.

La faiblesse des erreurs trouvées en adoptant pour l'onde une forme approximative confirme la justesse du procédé qu'on a suivi.

30. On doit remarquer la particularité que l'erreur de volume des éléments représentés par $\frac{dE}{dX}$ est toujours positive, aussi bien dans la période montante que, dans la descendante, comme on peut facilement le reconnaître, en observant que, pour X négatif, les deux facteurs $\sin\pi\frac{X}{L}$ et x du coefficient $-\delta$ et de $(-dX+dx)$, largeur de l'élément, changent tous les deux de signe.

Cela indique qu'avec la valeur adoptée de y et avec celle de x que l'on en a déduite, chaque élément de volume absolu $(dX-dx)\,d'z$ possède à chaque instant un excès de volume qui ne devrait pas se présenter si la condition de continuité était parfaitement satisfaite.

En d'autres termes, afin que cette condition fût toujours complètement satisfaite, il faudrait en chaque point raccourcir l'un ou l'autre côté de l'élément, ou tous les deux ensemble, en corrélation avec l'excès de volume qu'il présente à ce même point; ce volume se réduit à zéro au sommet et aux points les plus bas de l'onde, et acquiert une valeur maxima au milieu de la demi-amplitude de l'onde.

Ceci posé, il est à remarquer que, si l'on réduisait même d'une ma-

nière sensible, d'après la même loi, les ordonnées seules des ondes, les valeurs de x que l'on obtiendrait avec les nouvelles courbes ne différeraient pas sensiblement de celles qu'on a déjà trouvées, attendu que le seul facteur variable, $\frac{dy}{dX}$, qui entre dans l'expression de l'action du déplacement de l'onde visible en direction horizontale, et qui avec la sinusoïde a pour valeur

$$\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$

changerait très peu, à cause de la petitesse du rapport limite $\frac{\Lambda}{L}$.

Suivant les observations faites, le rapport $\frac{\Lambda}{L}$ descend bien souvent au-dessous de 0,04; généralement il est compris entre 0,06 et 0,13, et très rarement il dépasse cette dernière limite.

Par conséquent, en portant les réductions sur les ordonnées, les vraies courbes des ondes devraient être plus déprimées vers le milieu des deux branches que ne le sont les sinusoïdes.

Cela est parfaitement d'accord avec ce que l'on observe dans la nature, où les courbes des ondes visibles apparaissent un peu plus minces et plus aiguës à leur sommet et plus plates dans le creux, abstraction faite, bien entendu, de la forme plus aiguë que les ondes présentent dans des circonstances spéciales, comme, par exemple, quand elles se forment sous l'action du vent.

D'après cela, si l'on représente par $d\lambda$ l'augmentation de longueur du côté $d'z$ correspondant à l'augmentation de volume $\frac{dE}{dX}dX$ de l'élément à un instant donné, la somme de toutes ces augmentations $d\lambda$ sur une verticale donnée à partir du fond jusqu'à l'onde interne correspondante à la profondeur p, c'est-à-dire $\int_{P}^{p} d\lambda$, fera connaître en chaque point de combien il faut raccourcir l'ordonnée de la sinusoïde correspondante, afin d'avoir la courbe de l'onde corrigée, ou, pour mieux dire, plus approchée.

La nouvelle ordonnée ε aura pour valeur

$$\varepsilon = y - \lambda.$$

En procédant d'une manière analogue, on arrivera à l'approximation que l'on veut.

Or, par rapport au volume $(dX + dx)\,d'z$ de l'élément avec son propre signe, on a

$$\frac{dE}{dX} = \delta(dX + dx)\,d'z,$$

par suite,

$$d\lambda = -\delta\,d'z = -\left[\frac{d^2x}{dX^2}\frac{dz}{dp} - \left(1 + \frac{dx}{dX}\right)\frac{d^2z}{dp\,dX}\right]dp,$$

ou encore

$$d\lambda = -\left[\frac{a^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\frac{2\frac{dp}{da} - 1 - \cos\pi\frac{X}{L}}{2\frac{dp}{da}}\sin\pi\frac{X}{L}\right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}\cos\pi\frac{X}{L}\right)\frac{\pi}{L}\frac{da}{2\,dp}\sin\pi\frac{X}{L}\right]dp,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{A^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}\int_P^p\left[1 - 2\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2W}{L}} + \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{4W}{L}}\right]dp$$

$$+ \frac{\pi^3}{8L^3}\sin\pi\frac{X}{L}\int_0^a a^2\,da$$

$$+ \frac{\pi^3}{4L^3}\cos\pi\frac{X}{L}\sin\pi\frac{X}{L}\int_0^a a^2\,da + \frac{\pi}{2L}\sin\pi\frac{X}{L}\int_0^a da + \text{const.},$$

puisque à p correspond a, et que pour $p = P$, $a = 0$.

En observant en outre que, pour $p = P$, $\lambda = 0$, on aura définitivement

$$\lambda = \frac{A^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}\left[(P - p) - \frac{2L}{2W + L}\,\frac{P^{\frac{2W}{L}+1} - p^{\frac{2W}{L}+1}}{P^{\frac{2W}{L}}}\right.$$

$$\left. + \frac{L}{4W + L}\,\frac{P^{\frac{4W}{L}+1} - p^{\frac{4W}{L}+1}}{P^{\frac{4W}{L}}}\right] + \frac{a^3}{24}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}$$

$$+ \frac{a^3}{12}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}\cos\pi\frac{X}{L} + \frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L}.$$

A $X = L$ et $X = 0$ correspond toujours $\lambda = 0$.

Dans le cas de $X = \frac{L}{2}$, auquel correspond l'augmentation maxima du volume des éléments, et par conséquent le raccourcissement maximum de l'ordonnée de l'onde sera

$$\lambda' = \frac{A^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\left[(P-p) - \frac{2L}{2W+L}\,\frac{P^{\frac{2W}{L}+1} - p^{\frac{2W}{L}+1}}{P^{\frac{2W}{L}}} + \frac{L}{4W+L}\,\frac{P^{\frac{4W}{L}+1} - p^{\frac{4W}{L}+1}}{P^{\frac{4W}{L}}}\right] + \frac{a^3}{24}\frac{\pi^3}{L^3} + \frac{a}{2}\frac{\pi}{L}.$$

A la surface du liquide pour laquelle $p = 0$ et $a = A$; on aura

$$\lambda'_1 = \frac{A^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\left(P - \frac{2LP}{2W+L} + \frac{LP}{4W+L}\right) + \frac{A^3}{24}\frac{\pi^3}{L^3} + \frac{A}{2}\frac{\pi}{L}.$$

En faisant l'application de cette formule au cas numérique traité plus loin, on obtient

$$\lambda'_1 = 0^{m},451,$$

et, par suite, l'ordonnée du milieu des branches de l'onde visible qui, avec la sinusoïde, était de $4^{m},000$ avec la courbe corrigée, devient de $3^{m},549$.

51. En substituant $y' + \frac{a}{2}$ à y dans les expressions

$$x = -\frac{a^2}{4}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L},$$
$$y = \frac{a}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right),$$

c'est-à-dire en élevant de la quantité $\frac{a}{2}$ l'origine des coordonnées, on obtient

$$\frac{4}{a^2}y'^2 + \frac{16L^2}{\pi^2 a^4}x^2 = 1,$$

equation qui montre que, en adoptant les sinusoïdes pour courbes des

ondes, les trajectoires des molécules sont des ellipses ayant

Le demi-axe vertical..... $= \frac{a}{2}$,

Le demi-axe horizontal..... $= \frac{\pi}{4}\frac{a^2}{L} = \frac{b}{2}$,

b dénotant l'axe horizontal.

La valeur des axes de ces orbites s'obtient également à l'aide des expressions de x et de y, dans lesquelles on fait respectivement

$$X = \frac{L}{2} \quad \text{et} \quad X = 0.$$

52. Si l'on représente par q la profondeur rapportée au niveau moyen de la surface du liquide, savoir à la surface du liquide en repos, on aura

$$p + \frac{\Lambda}{2} = q,$$

et, par rapport à ce niveau, la profondeur à laquelle se trouve

L'extrémité inférieure des orbites est... $q = p + \frac{\Lambda}{2}$,

Leur centre..... $q' = p + \frac{\Lambda - a}{2}$,

Et leur sommet..... $q'' = p + \frac{\Lambda}{2} - a$.

La vitesse horizontale maxima a lieu :

A la profondeur q, à l'abscisse $X = L$, où elle a pour valeur

$$u_1 = -W\frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2};$$

A la profondeur q'', à l'abscisse $X = 0$, avec une valeur

$$u_2 = +W\frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2},$$

c'est-à-dire égale et en sens contraire à celle qui correspond à la profondeur q

La vitesse verticale est maxima à la profondeur q', et a pour valeur,

$$c_1 = + W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \quad \text{à l'abscisse} \quad X = \frac{L}{2},$$

et

$$c_2 = - W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \quad \text{à l'abscisse} \quad X = - \frac{L}{2},$$

c'est-à-dire égale et en sens opposé à celle qui correspond à l'abscisse $X = \frac{L}{2}$.

V

33. En résumé, on tire les conclusions suivantes :

1° *Les ondes visibles d'une masse liquide y déterminent des ondes internes d'une hauteur de plus en plus petite à partir de la surface jusqu'au fond, toutes de la même amplitude et d'une certaine ressemblance entre elles.*

2° *Les molécules ont un mouvement périodique et décrivent des orbites dont le grand axe est vertical.*

3° *Les ondes internes et l'onde visible, ainsi que les orbites des molécules situées sur la même verticale dans le liquide en repos, sont toutes des courbes synchrones et isochrones.*

Si l'on admet que les courbes des ondes internes et de l'onde visible soient des sinusoïdes simples de l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(1 + \cos \pi \frac{X}{L}\right),$$

la hauteur des ondes internes est

$$a = A\left[1 - \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2W}{L}}\right].$$

La vitesse des molécules, à un instant déterminé $t = \frac{L - X}{W}$, est :

En direction horizontale..... $u = W \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \cos \pi \frac{X}{L}$,

En direction verticale..... $v = W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L}$.

Les orbites sont des ellipses représentées par l'équation

$$\frac{4}{a^2}y'^2 + \frac{16L^2}{\pi^2 a^4}x^2 = 1,$$

rapportées à leur centre.

Les courbes des ondes, après une première correction, ont pour équation

$$z = \frac{a}{2}\left(1 + \cos\pi\frac{X}{L}\right) - \frac{X^2}{4}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}$$
$$+ \left[(P - p) - \frac{2L}{2W + L}\,\frac{P^{\frac{2W}{L}+1} - p^{\frac{2W}{L}+1}}{P^{\frac{2W}{L}}} + \frac{L}{4W + L}\,\frac{P^{\frac{4W}{L}+1} - p^{\frac{4W}{L}+1}}{P^{\frac{4W}{L}}}\right]$$
$$- \frac{a^3}{24}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L} - \frac{a^3}{12}\frac{\pi^3}{L^3}\sin\pi\frac{X}{L}\cos\pi\frac{X}{L} - \frac{a}{2}\frac{\pi}{L}\sin\pi\frac{X}{L}.$$

54. De ces conclusions découlent les corollaires suivants :

La vitesse est dirigée :

Horizontalement dans le sens de la marche des ondes dans le deuxième et le troisième intervalle, et en sens contraire dans le premier et le quatrième;

Verticalement, elle est dirigée de bas en haut dans la période montante, et de haut en bas dans la période descendante.

Les vitesses, dans les deux directions horizontale et verticale, ont respectivement deux maxima égaux et en sens opposés; ceux en direction horizontale se trouvent à des profondeurs différentes.

A la vitesse maxima dans une direction correspond une vitesse nulle et un déplacement maximum dans l'autre.

La vitesse a une valeur maxima :

En direction horizontale, sur les verticales qui passent par le sommet et par les points les plus bas de l'onde;

En direction verticale, sur les verticales qui passent par le milieu des demi-amplitudes de l'onde.

Les vitesses et les déplacements maxima des molécules sont et correspondent respectivement aux profondeurs et aux abscisses sui-

vantes :

$$X = L, \quad q = p + \frac{A}{2}, \qquad u_1 = -W\frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}, \quad v_1 = -\frac{a}{2},$$

$$X = 0, \quad q'' = p + \frac{A}{2} - a, \quad u_2 = +W\frac{a^2}{4}\frac{\pi^2}{L^2}, \quad v_2 = +\frac{a}{2},$$

$$X = \frac{L}{2}, \quad q' = p + \frac{A-a}{2}, \quad v_1 = +W\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}, \quad x_1 = -\frac{a^2}{4}\frac{\pi}{L},$$

$$X = -\frac{L}{2}, \quad q' = p + \frac{A-a}{2}, \quad v_2 = -W\frac{a}{2}\frac{\pi}{L}, \quad x_2 = +\frac{a^2}{4}\frac{\pi}{L}.$$

35. Comme on le voit, le mouvement des molécules est orbitaire, ainsi que l'a pressenti Newton, en disant qu'il avait lieu *per circulum* : bien entendu, le grand géomètre n'a jamais voulu dire par là que les trajectoires des molécules fussent des cercles parfaits, mais simplement que les molécules retournaient périodiquement à la même position, sans quoi il y aurait transport de liquide dans le sens de la marche des ondes, ce qui est contraire aux faits observés.

Par un procédé graphique et en partant de considérations purement géométriques d'invariabilité du volume de la masse liquide agitée par des ondes, le colonel Emy en a décrit, comme on l'a vu, le mouvement.

Ses appréciations étaient justes quant à la nature du mouvement, mais naturellement le procédé qu'il a suivi ne lui a pas permis de le mesurer, et ne devait donner autre chose qu'une idée générique du mode suivant lequel le phénomène devait s'accomplir.

36. Voulant passer à quelque application pratique, on doit noter d'abord qu'on n'a pas d'observations complètes d'ondes dans la Méditerranée.

Parmi celles qui furent mesurées dans les autres mers, on choisira celle qui a été relevée par Scoresby sur l'Atlantique du Nord, pour laquelle

$$A = 8^m,00, \quad L = \frac{170^m}{2}, \quad W = 14^m,6.$$

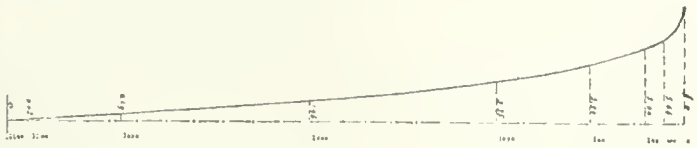
On choisit cette onde de préférence à d'autres, d'abord parce que,

indépendamment du grand soin de l'observateur, c'est celle qui se rapproche davantage des plus grandes de la Méditerranée, et ensuite parce que le rapport $\frac{W}{\sqrt{2L}} = 1,12$ s'approche, sans le dépasser, du coefficient limite $1,25$ donné par la formule d'Airy, $W = 1,25\sqrt{2L}$, dans le cas de très grandes profondeurs.

La profondeur de l'Atlantique du Nord, sur la plus grande partie de la ligne entre Liverpool et Boston, le long de laquelle Scoresby fit ses observations, peut être évaluée à 2000 brasses anglaises environ, comme on le relève sur la *Carte de la Géographie physique de la mer*, par Maury; on peut donc adopter approximativement $P = 3600^m$.

Avec ces données, on obtient les résultats du Tableau suivant; avec

Fig. 3.



les valeurs de a et de p données dans ce Tableau, on a construit la courbe représentée *fig.* 3.

L'inspection de ce Tableau et de cette courbe démontre, ce qui du reste était déjà apparu par l'examen de l'expression de a, que l'agitation produite par le mouvement des ondes diminue bien considérablement d'énergie à peu de distance au-dessous de la surface du liquide, mais qu'elle s'étend à de très grandes profondeurs, s'il y en a.

Port-Maurice, 16 novembre 1879.

Tableau des vitesses et des déplacements maxima de l'eau, produits à des profondeurs déterminées dans l'Atlantique du Nord par l'onde levée par Scoresby.

$X = 8,00, \quad L = 85,0, \quad W = 14,6, \quad P = 3600^m.$

p.	a.	$X = L = 85,0$.			$X = 0$		$X = \frac{L}{2} = 42,5$			$X = -\frac{L}{2}$
		q.	u_1.	y_1.	q''.	u_2, y_2.	q'.	v_1.	x_1.	v_2, x_2.
0	8,0	4,0	— 0,319	4,0	— 4,0	Égaux à u_1, y_1 en valeur absolue, mais de signe contraire.	0,0	2,158	— 0,591	Égaux à v_1, x_1 en valeur absolue, mais de signe contraire.
1	7,520	5,0	— 0,282	— 3,760	— 2,5		1,2	2,029	— 0,523	
2	7,391	6,0	— 0,272	— 3,696	— 1,4		2,3	1,994	— 0,505	
4	7,227	8,0	— 0,260	— 3,614	+ 0,8		4,4	1,950	— 0,483	
6	7,111	10,0	— 0,252	— 3,556	2,9		6,4	1,919	— 0,467	
8	7,019	12,0	— 0,246	— 3,510	5,0		8,5	1,894	— 0,455	
10	6,941	14,0	— 0,240	— 3,471	7,1		10,5	1,873	— 0,445	
15	6,783	19,0	— 0,229	— 3,392	12,2		15,6	1,830	— 0,425	
20	6,656	24,0	— 0,221	— 3,328	17,3		20,7	1,796	— 0,409	
50	6,159	54,0	— 0,189	— 3,080	47,8		50,9	1,662	— 0,351	
100	5,664	104,0	— 0,160	— 2,832	98,3		101,2	1,528	— 0,296	
200	5,036	204,0	— 0,126	— 2,518	199,0		201,5	1,359	— 0,234	
500	3,940	504,0	— 0,077	— 1,970	500,1		502,0	1,063	— 0,143	
1000	2,848	1004,0	— 0,040	— 1,424	1001,2		1001,6	0,768	— 0,075	
2000	1,463	2004,0	— 0,011	— 0,732	2002,5		2003,3	0,395	— 0,020	
3000	0,486	3004,0	— 0,0012	— 0,243	3003,8		3003,8	0,131	— 0,002	
3500	0,077	3504,0	— 0,00003	— 0,039	3503,9		3504,0	0,021	— 0,00005	
3600	0,0	3604,0	0,0	0,0	3604,0		3604,0	0,0	0,0	

SOMMAIRE.

I. — Questions.

1. Phénomènes physiques sur l'extension de l'agitation dans le sens de la profondeur. — 2. Explication du mécanisme des ondes donnée par le colonel *Emy*. — 3. Phénomènes physiques sur le synchronisme des mouvements. — 4. Termes du problème..... 289-295

II. — Forces.

5. Forces qui agissent sur la masse liquide. — 6. Axes des coordonnées. — 7. Trajectoires des molécules et courbes des ondes internes. — 8. Distances horizontale et verticale de deux ondes internes consécutives. — 9. Excès de pression, ou *charge*, auquel les molécules se trouvent soumises suivant la direction verticale. — 10. Excès de pression, ou *charge*, auquel les molécules se trouvent soumises suivant la direction horizontale. — 11. Influence de la forme d'une courbe en mouvement sur son action sur les molécules effleurées. — 12. Modification des charges due à la forme des courbes des ondes en mouvement. — 13. Action produite par le déplacement de l'onde visible. — 14. Compression dans une direction, et extension dans l'autre, auxquelles sont soumis les éléments de la masse liquide. — 15. Réaction des molécules suivant la direction verticale. — 16. Cette réaction croît avec la profondeur, et, dans cette direction, elle est toujours opposée au mouvement. — 17. Réaction des molécules suivant la direction horizontale..... 296-310

III. — Équations.

18. Équations du mouvement. — 19. Conditions de continuité et d'incompressibilité du liquide. — 20. Équations générales pour la résolution du problème. — 21. Résolution par la méthode de fausse position en partant de la sinusoïde simple pour courbe des ondes. — 22. Équations du mouvement dans ce cas. — 23. Mouvement orbitaire des molécules..... 310-317

IV. — Calculs.

24. Résolution des équations pour les molécules à la surface du liquide. — 25. Modification des charges résultant de la vitesse de translation et de l'amplitude des ondes. — 26. Hauteur des ondes internes. — 27. Variations de cette hauteur suivant la profondeur. — 28. Résolution des équations pour les molécules dans l'intérieur de la masse liquide. — 29. Évaluation de l'erreur commise en adoptant la sinusoïde pour courbe des ondes. — 30. Correction des sinusoïdes pour obtenir les vraies courbes des ondes. — 31. Équation des trajectoires des molécules. — 32. Maximum de vitesse des molécules dans les deux directions..... 317-334

V. — Conclusions.

33. Lois du mouvement. — 34. Particularités du mouvement. — 35. Justesse des prévisions de Newton et des explications données par le colonel Emy. — 36. Application à une onde de l'Atlantique..... 334-338

Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité.

PAR M. H. RESAL.

1. On s'occupe peu actuellement de la théorie mathématique de la capillarité, fondée réellement par Laplace et développée par Poisson, dont l'Ouvrage, publié en 1831, est un véritable monument.

La lecture de la nouvelle théorie de l'action capillaire de Poisson est pénible; on ne retrouve pas dans ce travail la régularité didactique et la coordination remarquable qui caractérisent les autres publications de l'illustre géomètre [1]. Il établit d'ailleurs l'équation de la surface capillaire et la constance de l'angle que forme cette surface avec une paroi d'une nature donnée d'une manière telle, que l'étude de sa solution de ce double problème exige un travail considérable. Enfin, lorsqu'il traite les questions soulevées par les physiciens de son époque, parmi lesquels Gay-Lussac joue le premier rôle, il emploie constamment les mêmes variables, au lieu d'approprier le choix des variables à la nature de chaque problème, en vue d'arriver plus rapidement et plus nettement à la solution.

Depuis 1831, le domaine physique de la capillarité s'est considérablement agrandi. Les travaux de M. Plateau sur la forme naturelle des

[1] Ce qui tendrait à faire supposer que l'ouvrage dont il s'agit est la réunion de Mémoires successifs sans que l'auteur ait eu d'avance un plan bien arrêté

liquides et des bulles creuses de liquides visqueux, les expériences de M. Boutigny sur les globules liquides formés sur des plaques portées à une température telle que le contact n'ait pas lieu, etc., font époque dans l'histoire de la Physique.

Il m'a semblé qu'il ne serait pas sans intérêt de mettre la théorie des phénomènes capillaires au courant des progrès réalisés, en la rendant, par sa simplicité, très accessible aux jeunes géomètres, et c'est à ce point de vue que je vais me placer.

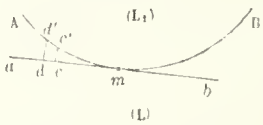
I. — *Formules fondamentales.*

2. *Forme de la surface capillaire.* — Soient (*fig.* 1)

AmB une section normale faite en un point m, dont la masse est représentée par la même lettre, de la surface de séparation de deux fluides (L_1) et (L), la concavité étant tournée vers (L_1);
ab la trace du plan tangent en m;
H_1, H les poids spécifiques des deux fluides.

Nous ne considérerons que le cas où les forces extérieures agissant

Fig. 1.



sur chaque point m de (L) et (L_1) dérivent d'un potentiel $m\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ étant une fonction des coordonnées de ce point.

Le point m est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des actions qu'il reçoit des molécules de (L_1) et (L).

On peut considérer la résultante des actions moléculaires de (L_1) sur m comme étant due à celle Q_1 de ce fluide, dans l'hypothèse où ab serait la surface de séparation, et à la résultante prise en sens contraire $-Q'_1$ des actions provenant des molécules du ménisque.

Si nous désignons pour (L) par Q et Q' les équivalents de Q_1 et Q'_1, l'action exercée par ce fluide sur m sera de même la résultante de Q

et Q'; de sorte que les forces Q, Q', Q_1, $-Q'_1$ et les forces extérieures doivent se faire équilibre sur le point m.

Nous supposerons, avec Laplace, Gauss et Lamé, que (L), (L_1) sont homogènes dans toute leur masse, tandis que, par des considérations très contestables, Poisson est conduit à admettre que la densité des deux fluides subit une altération dans le voisinage de la surface de séparation. Les forces Q et Q_1 seront ainsi considérées comme normales à AmB.

Il faut donc, pour l'équilibre, que la résultante de Q', $-Q'_1$ et de la force extérieure agissant sur m soit aussi normale à la surface, ou que le travail élémentaire de ces trois forces soit nul pour un déplacement de m sur cette surface ou encore que la somme de $m\hat{x}$ et du potentiel des actions du ménisque de (L) sur m et de celles du ménisque de (L_1) prises en sens contraire soit constante pour tout point de la surface.

Le potentiel de l'action de la molécule m' du ménisque de (L) sur m est de la forme $mm'f(r)$, $f(r)$ étant une certaine fonction de la distance r de ces deux molécules.

Considérons un élément de volume de ce ménisque, limité par deux plans normaux en m faisant entre eux un angle infiniment petit $d\vartheta$ et par deux cylindres concentriques; soient c, d les intersections avec ab et c', d' les intersections avec AB des génératrices de ces cylindres comprises dans le plan de la figure et situées d'un même côté de m. Si l'on remarque que le rayon γ de la sphère d'activité est extrêmement petit, on peut supposer $r = \overline{mc}$, et par suite $\overline{cd} = dr$: le potentiel dû à l'action de la masse déterminée par l'élément de volume est, par suite,

$$m\frac{\Pi}{g}f(r)\overline{cc'}\,r\,d\vartheta\,dr,$$

et, pour toute la portion du ménisque limitée par les deux plans normaux,

$$m\frac{\Pi}{g}d\vartheta\int_0^\gamma f(r)\overline{cc'}\,r\,dr.$$

Mais comme, en appelant α le rayon de courbure de l'une des sections

normales, on a

$$\overline{cc'} = \frac{r^2}{2\iota},$$

l'expression ci-dessus devient

$$m\frac{\Pi}{g}\frac{d\theta}{2\iota}\int_0^{\gamma} f(r)\,r^2\,dr = m\frac{d\theta}{\iota}k,$$

en posant

$$\Pi\frac{\Pi}{2g}\int_0^{\gamma} f(r)\,r^2\,dr = k,$$

k étant une constante spécifique.

Soient R, R′ les rayons de courbure principaux en m de la surface; l'angle θ étant censé mesuré à partir de la trace sur le plan tangent du plan normal correspondant au premier de ces rayons, on a

$$\frac{1}{\iota} = \frac{\cos^2\theta}{R} + \frac{\sin^2\theta}{R'},$$

et le potentiel pour tout le ménisque est

$$m\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{R} + \frac{\sin^2\theta}{R'}\right)d\theta = mk\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Le potentiel du ménisque de (L_1) pourra se représenter de la même manière par

$$mk_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si donc on appelle mC une constante, nous aurons

$$mk\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - mk_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + m\bar{x} + m\mathrm{C} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{K}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\Pi}{g}(\bar{x} + \mathrm{C}),$$

en posant

$$\frac{\Pi}{g}(k - k_1) = \mathrm{K}.$$

L'équation ci-dessus est celle de la surface AmB ou de ce que l'on

appelle la *surface capillaire*. En la mettant sous la forme

$$\frac{\Pi}{g}\mathfrak{z} - K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \text{const.},$$

on reconnaît sans peine que l'influence du ménisque se traduit par une diminution de pression positive ou négative au point m de la surface, représentée par

$$K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

En attribuant des signes à R et R′ en raison du sens de la courbure de l'une et de l'autre des sections normales, l'équation de la surface peut se mettre sous la forme suivante,

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(\mathfrak{z} + C)}{\mu},$$

μ étant une constante positive dépendant de la nature de (L) et (L₁), que l'expérience seule peut faire connaître, et C une constante arbitraire dont on déterminera la valeur dans chaque problème par les conditions aux limites.

Dans le cas où la force extérieure est la pesanteur, l'équation (1) devient, en posant $\frac{g}{\mu} = \frac{1}{a^2}$,

$$(2) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(y + \lambda)}{a^2},$$

y étant la distance du point m à un plan horizontal déterminé, et λ une constante remplaçant C.

5. *Influence d'une paroi sur la surface de contact.* — Prenons pour plan de la figure le plan normal au point m de l'intersection de la paroi et de la surface.

Soient

mn, aa_1 (*fig.* 2) les tangentes en m aux deux sections faites respectivement dans ces deux surfaces par le plan de la figure;

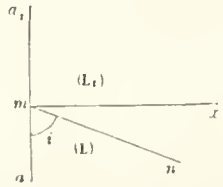
i l'inclinaison de mn sur ma dans (L);

mx la normale à la paroi, dont la substance est censée homogène.

Si la paroi était un plan indéfini, son action $m.N$ sur m serait dirigée suivant Ox, et N serait une constante.

Quelle que soit la forme de la paroi, on peut également considérer N

Fig. 6.



comme constant, car il est clair que les actions sur m exercées par les molécules du ménisque de la paroi ne peuvent donner, suivant Ox, que des composantes de l'ordre de quantités que l'on peut négliger.

Nous négligerons également l'influence des ménisques de (L) et (L_1), qui est relativement faible, dans la détermination de la composante suivant mx de l'action qu'exercent les deux fluides sur m.

Soient $mm'f(r)$ l'action exercée par une molécule m' de (L) sur m, r étant la distance des deux molécules.

Concevons dans (L) un cône ayant m pour sommet, d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, dont les génératrices fassent à un infiniment petit près l'angle α avec mn. La masse élémentaire $\frac{\Pi}{g} r^2\, d\omega\, dr$ de ce cône donne suivant mx la composante

$$m \frac{\Pi}{g} r^2\, d\omega\, dr\, f(r) \cos\alpha,$$

et l'on a pour tout le cône

$$m \frac{\Pi}{g} d\omega \cos\alpha \int_0^{\gamma} f(r) r^2\, dr = mq\, d\omega \cos\alpha,$$

q étant une constante dépendant de la nature de (L).

Il vient, par suite, pour la composante normale totale due à l'action de ce fluide,

$$mq \int \cos\alpha\, d\omega,$$

l'intégrale se rapportant au fuseau sphérique de centre m d'un rayon

égal à l'unité, limité par les plans mn, ma ; mais cette intégrale n'est autre chose que la projection du fuseau sur un plan perpendiculaire à mx, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos i$. L'expression ci-dessus devient donc

$$mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i).$$

En appelant q_1 l'équivalent de q pour (L_1), ce fluide donne de même la composante normale

$$mq\frac{\pi}{2}(1 + \cos i).$$

On a donc, en faisant abstraction des forces extérieures, dont l'influence est relativement très faible,

$$mN + mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i) + mq_1\frac{\pi}{2}(1 + \cos i) = 0,$$

d'où

$$\cos i = \frac{2N + \pi(q + q_1)}{\pi(q - q_1)},$$

et l'angle i est ainsi constant.

4. *Rappel des résultats de l'expérience.* — Dans tout ce qui suit, nous prendrons le millimètre pour unité linéaire.

D'après l'expérience, on a

	a.	$2a^2$.
	mm	
Pour l'eau	2,826	15,5861
Pour une dissolution saturée de sel marin	2,569	13,20
Pour l'acide azotique	2,366	11,20
Pour l'acide chlorhydrique	2,291	10,50
Pour le mercure	1,811	6,528
Pour l'alcool	1,732	6,00
Pour l'huile de lavande	1,693	5,60

Si nous désignons par α l'angle aigu de raccordement que forme un liquide avec une paroi, on a

		α.
Pour le verre ordinaire et le mercure (surface convexe)		45°.30
Pour le verre privé d'air et le mercure	»	55.00
Pour l'acier et l'alcool	»	90.00
Pour le verre et l'eau (surface concave)		0.00

Nous dirons qu'un liquide mouille ou ne mouille pas une paroi, selon que sa surface sera concave ou convexe dans la région du contact avec la paroi.

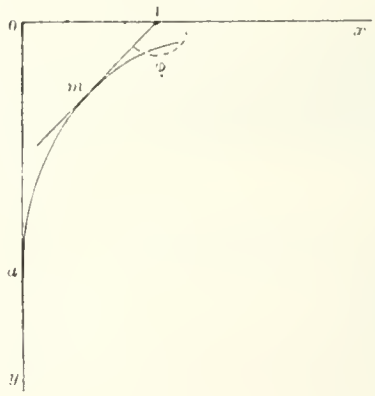
§ II. — *Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants.*

3. *Forme que prend la surface d'un liquide au contact d'une lame verticale.* — Nous supposerons que la lame est suffisamment longue, dans le sens horizontal, pour que ses extrémités n'influent pas d'une manière sensible sur la forme de la partie moyenne de la surface que l'on peut dès lors regarder comme cylindrique.

Le tout se réduit donc à considérer une section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'intersection de la lame avec le niveau statique du liquide.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la surface est convexe; les

Fig. 3.



formules obtenues s'appliqueront à la concavité en changeant le sens positif de l'axe des y.

Soient (*fig.* 3)

Ox et Oy l'horizontale et la verticale du point d'intersection O de la lame et du niveau;

x, y les coordonnées d'un point quelconque m de la courbe;

φ l'angle que forme la tangente en ce point avec Ox;
a l'intersection de la courbe avec Oy;
s l'arc am;
α l'angle de raccordement en a.

On a évidemment

$$dy = -ds\sin\varphi, \quad dx = -ds\cos\varphi, \quad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

On doit supposer, dans la formule (2), $R' = \infty$ et, en raison de l'interprétation donnée à la courbure à la surface, $\lambda = 0$, d'où successivement

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}(1 + \cos\varphi),$$

en remarquant que $\frac{d\varphi}{ds}$ est nul avec y, c'est-à-dire pour $\varphi = 180^\circ$. On tire de là

$$ds = \frac{a}{2}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$dy = -a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi,$$

et, comme y est nul pour $\varphi = 180^\circ$, il vient

$$(a) \qquad y = 2a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Nous avons maintenant

$$dx = -\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = -a\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi,$$

d'où

$$x = -a\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \log\frac{1 + \tang\frac{\varphi}{4}}{1 - \tang\frac{\varphi}{4}}\right) + \text{const.}$$

Mais on doit avoir $x = 0$ pour $\varphi = \alpha$, et par suite

$$(b) \qquad x = a\left[2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right) + \log\left(\frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}} \times \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}}\right)\right].$$

Comme x est infini pour $\varphi = 180^\circ$, on voit qu'au point de vue géométrique la courbe est asymptotique au niveau; cette courbe est d'ailleurs complètement définie par les équations (a) et (b).

Si nous désignons par y_0 l'abaissement du liquide au contact de la lame, nous avons

$$(c) \qquad y_0 = 2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

soit $y_0 = 3^{mm},22$ pour le mercure et une lame de verre.

L'élévation de l'eau au contact d'une lame de verre est

$$y_0 = 5^{mm},652.$$

6. *Forme de la surface d'un liquide entre deux lames verticales parallèles, dont l'une est mouillée et l'autre non mouillée par le liquide.*

Soient (*fig.* 4)

xx' le profil du niveau;

aOa' celui de la surface du liquide entre les deux lames, la partie Oa de ce profil correspondant à la direction de Ox se trouvant au-dessus du niveau;

Oy, Oy' les portions de la verticale du point O situées respectivement au-dessus et au-dessous du niveau.

Nous rapporterons respectivement les courbes Oa, Oa' aux axes Oy, Ox et Oy', Ox', en conservant les notations du numéro précédent.

Nous avons, pour Oa,

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

et

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y}{a^2},$$

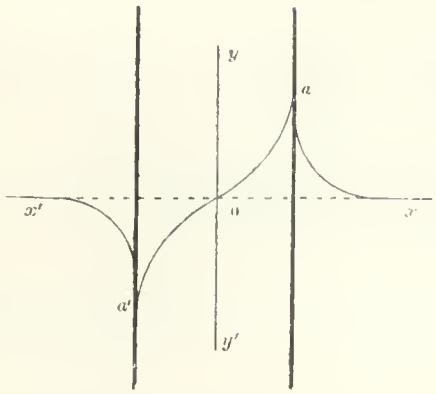
d'où

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$(b) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = -\frac{\cos\varphi}{a^2} + \text{const.}$$

Si nous désignons par φ_0 la valeur de φ correspondant au point O,

Fig. 4.



comme, d'après la formule (a), on a $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ pour $y = 0$, la formule (b) se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

d'où

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

$$dx = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

$$dy = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}}$$

et

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right), \\ y &= a\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Soit x_1 la distance du point O à la lame considérée ; nous aurons

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right).$$

En accentuant les lettres a, x_1 et α pour l'autre lame, nous aurons de même

$$x_1 = \frac{a'}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right).$$

Enfin, si nous désignons par $2e$ la distance $x_1 + x'_1$ des deux lames, l'angle φ_0 sera déterminé par l'équation

$$g \left\{ \begin{aligned} & a\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) \\ & + a'\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha'} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) = 2e\sqrt{2}, \end{aligned} \right.$$

qui dépend généralement de s fonctions elliptiques, et dont la solution ne peut se trouver que dans chaque cas particulier.

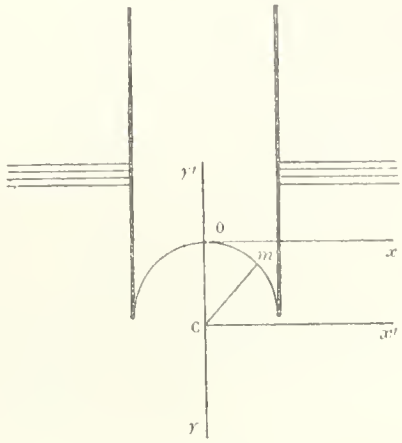
Supposons que les deux liquides soient l'eau et le mercure et que les deux lames soient en verre; nous aurons $\alpha = 0$ et, à $30'$ près, $\alpha' = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$\begin{aligned} & \frac{2,286}{\sqrt{2}}\left(2\log\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{2} - 2\log\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2} - 4\cos\frac{\varphi_0}{2}\right) \\ & - 1,811\left(\cos\varphi_0 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) = 2e\sqrt{2}, \end{aligned}$$

équation dont il nous paraitrait superflu de faire des applications numériques.

7. *Forme d'un liquide entre deux lames parallèles de même nature.* — Prenons pour origine des coordonnées le point maximum O du profil de la surface, et soient Ox la tangente en ce point et Oy la verticale

Fig. 5.



du même point. Conservons d'ailleurs les notations précédentes. L'équation (2) nous donne

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a^2}(y + \lambda),$$

λ désignant ici la hauteur du point O en contre-bas du niveau.

On déduit de là

$$(b) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{ds^2} = \dfrac{1}{a^2}\sin\varphi, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi^2}{ds^2} = \dfrac{1}{a^2}(C - \cos\varphi), \end{cases}$$

C étant une constante au moyen de laquelle λ s'exprimera, en remarquant que les formules (a), (b) doivent donner la même valeur pour $\frac{d\varphi}{ds}$, en y supposant $y = 0$ et $\varphi = 0$, d'où

$$(c) \qquad \lambda = a\sqrt{2(C - 1)}.$$

De l'équation (b) on déduit successivement

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} ds &= \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}},\\ dy &= \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}},\\ y &= a\sqrt{2}\left(\sqrt{C-\cos\varphi}+\sqrt{C-1}\right),\\ dx &= \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}},\\ x &= \frac{a}{2}\left(e\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}}-\int_0^{\varphi}\sqrt{C-\cos\varphi}\, d\varphi\right), \end{aligned}\right.$$

et x s'exprime au moyen de fonctions elliptiques. Si $2e$ désigne la largeur des lames, on a, pour déterminer C et par suite λ, l'équation

$$e = \frac{a}{2}\left(C\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}}-\int_0^{\alpha}\sqrt{C-\cos\varphi}\, d\varphi\right),$$

que l'on ne pourra résoudre que par tâtonnements.

Mais, lorsque les lames sont très rapprochées l'une de l'autre, on peut éluder l'emploi des fonctions elliptiques en opérant par approximation, comme nous allons le faire voir.

8. *Deux lames parallèles et verticales sont très rapprochées l'une de l'autre.* — L'ordonnée y étant très petite par rapport à e, le profil de la surface est peu différent d'un arc de cercle, dont le centre C est situé sur Oy, et dont nous déterminerons le rayon r par la double condition que l'arc de cercle passe par le point O et les points de raccordement.

Soient

Oy' le prolongement de Oy au delà de O;
Cx' l'horizontale du centre C;
$r=r(1+u)$ le rayon vecteur mené de ce centre au point m;
θ l'angle formé par ce rayon avec Cy'.

Nous supposerons que u et ses dérivées sont assez petits pour que l'on puisse s'en tenir aux termes du premier ordre.

Si λ continue à désigner la hauteur du niveau au-dessus du sommet O, la hauteur au-dessus du point m est, à très peu de chose près,

$$\lambda + \iota - \iota \cos\theta.$$

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right) = \frac{\lambda + \iota - \iota\cos\theta}{a^2}.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$(a) \qquad \frac{\iota(\lambda + \iota)}{a^2} - 1 = \frac{\iota^2\beta}{a^2},$$

nous aurons

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{\iota^2}{a^2}(\beta - \cos\theta) = 0,$$

d'où

$$(b) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left(-\beta + \dfrac{\theta}{2}\sin\theta + \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta\right), \\ \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\dfrac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{A}\right) + \mathrm{B}\cos\theta\right], \end{cases}$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Mais pour $\theta = 0$ nous devons avoir $u = 0$ par hypothèse, et de plus $\frac{du}{d\theta} = 0$, pour exprimer que la tangente en O est horizontale.

Les formules (b) se réduisent alors aux suivantes :

$$(b') \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\beta(\cos\theta - 1) + \dfrac{\theta}{2}\sin\theta\right], \\ \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\dfrac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} - \beta\right)\right]. \end{cases}$$

L'angle ψ, formé par la tangente en m avec Cy', est donné par la formule

$$(c) \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{du}{d\theta} + \theta.$$

Si θ' est la valeur de θ correspondant au raccordement pour lequel on a $\psi = \pi - \alpha$, nous aurons

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta'},$$

ou, aux termes du second ordre près,

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \varepsilon,$$

ε étant la valeur de $\frac{du}{d\theta}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Désignons par u' la valeur de u pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; comme u est nul au point de raccordement, nous aurons

$$u' + \varepsilon^2 = 0$$

ou

$$\beta(\sin\alpha - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{a^2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha + \cos\alpha\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right]^2 = 0.$$

Une première approximation donne

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

et, en tenant compte des termes du premier ordre et remarquant que

$$\varepsilon = \frac{e}{\sin\theta'} = \frac{e\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

$2e$ étant la distance des lames,

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \frac{e^2}{a^2\cos\alpha}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}\right) + \frac{\cos\alpha}{2}\right]^2.$$

L'équation (a) donne alors

$$(d) \qquad \lambda = \frac{a^2}{e}\cos\alpha + \frac{e}{2}\,\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \sin\alpha},$$

aux termes du second ordre près.

Pour l'eau et le verre on trouve, pour la hauteur du sommet du ménisque au-dessus du niveau,

$$\lambda = \frac{a^2}{e} + \frac{e\pi}{4} = \frac{7,79}{e} + 0,78e.$$

Pour le mercure et le verre on trouve, pour la hauteur du sommet du ménisque en contre-bas du niveau,

$$\lambda = 0,701\frac{a^2}{e} + 1,21e = \frac{2,29}{e} + 1,21e.$$

9. *De la surface capillaire dans un tube circulaire d'un faible diamètre.* — La forme du ménisque étant très sensiblement sphérique, nous rapporterons sa surface à celle d'une sphère tangente dont la position du centre et la grandeur du rayon peuvent être, dans certaines limites, considérées comme indéterminées, et que nous fixerons en raison des circonstances qui se produiront.

Considérons une section faite par un plan passant par l'axe, et conservons les notations du numéro précédent; nous aurons toujours

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \quad \psi = \theta + 90^\circ - \frac{du}{d\theta}.$$

La surface étant de révolution, R′ est la portion de la normale déterminée par l'axe Cy', et nous avons

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin\psi}{r(1+u)\cos\theta} = \frac{1}{r}\left(-u + \frac{du}{d\theta}\tang\theta + 1\right).$$

La hauteur du point m en contre-bas du niveau étant

$$\lambda + r - r\cos\theta,$$

nous aurons

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\tang\theta + 2u\right) = \frac{\lambda + r(1-\cos\theta)}{a^2},$$

d'où

$$(a)\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\lambda r + \iota^2[(1-\cos\theta) - 2a^2)}{a^2} = 0.$$

Posant

$$(b)\qquad \frac{\lambda r + \iota^2 - 2a^2}{a^2} = \frac{\iota^2\beta}{a^2},$$

l'équation (a) devient

$$(c)\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\iota^2}{a^2}(\beta - \cos\theta) = 0.$$

Plus généralement, considérons l'équation

$$(3)\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + F(\theta) = 0,$$

$F(\theta)$ étant une fonction quelconque de θ, en raison de ce qu'elle se présentera plusieurs fois dans ce qui suit, et proposons-nous d'en trouver l'intégrale générale.

Posant

$$u = U\sin\theta,$$

l'équation (3) se transforme dans la suivante,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + \frac{dU}{d\theta}(2\cot\theta - \operatorname{tang}\theta) + \frac{F(\theta)}{\sin\theta} = 0,$$

d'où

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}\left[A - \int F(\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta\right],$$

$$U = B + A\left(-\frac{1}{\sin\theta} + \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right) - \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\int F(\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On a enfin, pour l'intégrale cherchée,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \mathrm{B}\sin\theta + \mathrm{A}\left(-1 + \sin\theta \log\frac{1+\tang\frac{\theta}{2}}{1-\tang\frac{\theta}{2}}\right) \\ &\quad - \sin\theta \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\int \mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta. \end{aligned}\right.$$

Revenons maintenant à l'équation (c); comme elle est satisfaite par $u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2}$, son intégrale s'obtiendra en ajoutant à cette valeur l'expression (4), en y supposant

$$\mathrm{F}(\theta) = -\frac{\iota^2}{a^2}\cos\theta,$$

ce qui donne

$$u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2} + \mathrm{B}\sin\theta + \mathrm{A}\left(-1 + \sin\theta\log\frac{1+\tang\frac{\theta}{2}}{1-\tang\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$+ \frac{\iota^2}{3a^2}(\theta\sin\theta + \cos\theta).$$

Il faut que A soit nul, car autrement u deviendrait infini pour $\theta = 90^\circ$; il nous reste donc

$$(d)\qquad u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2} + \mathrm{B}\sin\theta + \frac{\iota^2}{3a^2}(\theta\sin\theta + \cos\theta),$$

d'où

$$(e)\qquad \frac{du}{d\theta} = \mathrm{B}\cos\theta + \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.$$

Or cette dernière valeur doit être nulle pour $\theta = 0$, puisqu'au point correspondant la tangente est horizontale, ce qui exige que B soit nul. Nous avons donc finalement

$$(d')\qquad u = \frac{\iota^2}{a^2}\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\theta\sin\theta + \cos\theta}{3}\right),$$

$$(e')\qquad \frac{du}{d\theta} = \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondant au point de raccordement par lequel il nous est permis de faire passer le cercle de comparaison; nous aurons

$$(f)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\theta' \sin\theta' + \cos\theta'}{3} = 0, \\ \theta' = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + \dfrac{r^2}{3a^2}\theta' \cos\theta', \end{cases}$$

équations qui feront connaître θ' et β. Mais comme, dans la formule (d), β est multiplié par le facteur $\frac{r^2}{a^2}$ supposé très petit, nous l'obtiendrons avec une approximation suffisante en supposant $\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ dans la première des formules (f), ce qui donne

$$\beta = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right].$$

En appelant $2e$ le diamètre du tube, on a

$$r = \frac{e}{\sin\theta'} = \frac{e}{\cos\alpha},$$

et la formule (b) donne

$$\lambda = \frac{2a^2}{e}\cos\alpha + \frac{e}{\cos\alpha}\left\{\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right] - 1\right\}$$

pour la distance du sommet du ménisque au niveau.

10. *Expression du volume d'un liquide compris entre sa surface libre et un plan horizontal déterminé, quelle que soit la forme de la section du tube.* — Nous supposerons que la surface libre (S) présente sa convexité vers le plan, et nous désignerons par A la section du tube et par P le périmètre du contour de la surface (S).

En nous reportant au n° 1, nous pourrons écrire

$$(a)\qquad K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \Pi y - C,$$

$\frac{C}{H}$ étant la hauteur du plan au-dessus du niveau du liquide extérieur au tube.

Concevons que l'on décompose la surface capillaire en éléments par des lignes de courbure infiniment voisines dans chacune des deux séries, et soient $d\omega$ un de ces éléments et χ l'angle que forme sa normale avec la verticale. Nous aurons pour le volume cherché, en ayant égard à la formule (a),

$$(b) \qquad V = \int y \cos\chi \, d\omega = \frac{K}{H} \int \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \cos\chi \, d\omega + \frac{C}{H} A.$$

Considérons maintenant une surface (S') parallèle à (S) et qui en soit distante d'une quantité infiniment petite ε. Les normales aux sommets de $d\omega$ détermineront dans (S') un élément $d\omega'$ dont les côtés seront dans les rapports $\frac{R-\varepsilon}{R}$, $\frac{R'-\varepsilon}{R'}$ avec ceux de $d\omega$.

On a donc

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{(R-\varepsilon)(R'-\varepsilon)}{RR'} = 1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon,$$

et la formule (b) peut s'écrire ainsi :

$$V = \frac{K}{H\varepsilon} \int (d\omega - d\omega') \omega \chi + \frac{C}{H} A.$$

Or l'intégrale représente la différence des projections horizontales des aires de (S) et (S'), ou la projection de la zone déterminée dans (S) par les normales menées aux points du contour de (S'), qui est égale à $P\varepsilon \cos\alpha$. On a donc

$$(5) \qquad V = \frac{KP}{H} \cos\alpha + \frac{C}{H} A.$$

Si le tube est circulaire et si le plan sécant est le niveau extérieur du liquide, on a

$$C = 0, \quad P = 2\pi r,$$

et, en posant comme plus haut $\frac{K}{H} = a^2$, on a

$$V = a^2 \times 2\pi e \cos\alpha.$$

En désignant par λ la hauteur moyenne de (S) au-dessus du niveau, on aura

$$V = \Pi e^2 \lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2a^2 \cos\alpha}{e},$$

ce qui est conforme au résultat obtenu au numéro précédent, aux termes en e près.

Dans le cas de deux lames parallèles on a

$$V = a^2 \Pi e \cos\alpha,$$

d'où λ, qui est moitié moindre que dans le cas d'un tube.

11. *Liquides superposés dans un tube circulaire capillaire.* — Considérons un tube plongé dans un liquide (A_1) dont la portion comprise dans ce tube soit surmontée d'un volume déterminé d'un autre liquide (A) de moindre densité.

Nous supposerons que (A) mouille et que (A_1) ne mouille pas la paroi intérieure du tube. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre hypothèse.

Considérons une section faite par un plan passant par l'axe du tube.

Soient

aOa, $a_1O_1a_1$ les profils des ménisques supérieur et inférieur;
OO_1 l'axe du tube;
Π l'intersection, avec sa paroi intérieure, du plan de niveau extérieur;
y, y_1 les distances de deux points m, m_1 de aOa, $a_1O_1a_1$ situés sur la même verticale à la droite Π;
n l'intersection de mm_1 avec Π;
C la pression censée constante exercée sur la section Π.

Nous admettrons pour (A) les notations qui précèdent, en les affectant de l'indice 1 pour (A_1).

Concevons un cylindre vertical d'une section infiniment petite dont mm_1 serait l'axe.

L'action du ménisque aOa s'ajoute à la réaction C en n pour faire équilibre au poids de ce cylindre, d'où la relation

$$(a) \qquad K\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\Pi y-C.$$

On a de même

$$(b) \qquad K_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}\right)=\Pi_1 y_1-C.$$

Le volume compris entre les surfaces aOa et $a_1O_1a_1$ est donné et peut être représenté par

$$(c) \qquad \Pi e^2 H,$$

H étant la portion de la longueur du tube qu'occuperait le liquide dans le tube sans les effets de la capillarité. D'après le numéro précédent, les volumes $IaOaI$, $I_1a_1O_1a_1I_1$ ont respectivement pour expressions

$$\frac{K.2\frac{\pi}{2}e}{\Pi}\cos\alpha+\frac{C\frac{\pi}{2}e^2}{\Pi},$$

$$\frac{K.2\pi e}{\Pi_1}\cos\alpha_1+\frac{C\pi e^2}{\Pi_1};$$

en égalant leur somme à l'expression (c), on trouve

$$(d) \qquad C=\frac{\Pi-\frac{2}{e}\left(\frac{K\cos\alpha}{\Pi}+\frac{K_1\cos\alpha_1}{\Pi_1}\right)}{\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi_1}}.$$

En portant cette valeur dans la formule (b), on obtiendra une équation analogue à celle que nous avons intégrée par approximation au n° 9.

Si par approximation on prend $R_1=R'_1=e\cos\alpha_1$, la formule (b) donne, pour la valeur moyenne de la distance du ménisque inférieur au niveau,

$$y_1=\frac{2K\cos\alpha_1}{\Pi e}+\frac{\Pi-\frac{2}{e}\left(\frac{\cos K\alpha}{\Pi}+\frac{K_1}{\Pi_1}\cos\alpha_1\right)}{\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi_1}},$$

ou encore

$$y_1 = \frac{2a_1^2 a_1 \alpha_1}{e} + \frac{\Pi - \frac{2}{e}(a^2 \cos\alpha + a_1^2 \cos\alpha_1)}{1 + \frac{\Pi_1}{\Pi}}.$$

La même méthode s'applique au cas où plusieurs liquides se superposeraient dans un tube.

12. *Forme d'une très petite goutte d'un liquide reposant sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas.* — Nous aurons dans ce cas

$$a^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = y + \lambda,$$

λ étant une constante dont la valeur résultera de la solution du problème. Si les dimensions de la goutte sont très petites, il en sera de même de y et en dehors de sa zone de contact avec le plan.

En nous reportant au n° 9, on voit que la forme de la goutte est donnée par l'équation (c), dans laquelle β remplace l'inconnue λ. On en déduit de la même manière

$$(a) \qquad \begin{cases} u = \frac{r^2}{a^2}\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\theta \sin\theta + \cos\theta}{3}\right), \\ \frac{du}{d\theta} = \frac{r^2}{3a^2}\theta \cos\theta. \end{cases}$$

Si V désigne l'angle que forme la tangente avec le rayon vecteur, on a

$$V = 90^\circ - \frac{du}{d\theta}.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondant au raccordement avec le plan; on a

$$V = \theta' - 90^\circ + \alpha,$$

d'où

$$(b) \qquad \theta' = 180^\circ - \alpha - \frac{r^2}{3a^2}\theta' \cos\theta,$$

et, en négligeant le carré de $\frac{r^2}{a^2}$,

$$\theta' = 180^\circ - \alpha + \frac{r^2}{2\beta a^2}(\pi - \alpha)\sin\alpha.$$

Nous supposerons que l'on prenne pour r le rayon de la sphère équivalente à la goutte, et qui est par conséquent une donnée de la question.

Nous devrons exprimer que l'excès de l'aire de la section méridienne sur celle d'un grand cercle est nulle, ou que l'on a

$$r\int_0^{\theta'} u\,d\theta - \frac{r(1+u')\sin\theta'\cos\theta'}{2} - \frac{r}{2}(\pi - \theta') = 0,$$

u' étant la valeur de u correspondant à $\theta = \theta'$.

On déduit de là

$$\frac{\beta}{2}\frac{r^2}{a^2}(-\theta' + \sin\theta'\cos\theta') - \frac{\sin 2\theta'}{4} - \frac{\pi - \theta'}{2}$$
$$+ \frac{r^2}{a^2}\left[\frac{2\sin\theta' - \theta'\cos\theta'}{3} - \frac{1}{6}(\theta'\sin\theta' + \cos\theta')\sin\theta'\cos\theta'\right] = 0,$$

équation d'où l'on déduira $\frac{\beta r^2}{a^2}$ qui, comme on devait s'y attendre, n'est pas une quantité très petite, puisque c'est devant son équivalent λ que nous avons négligé des termes.

13. *Goutte très large.* — L'équation de la section méridienne de la surface capillaire de révolution peut se mettre sous la forme

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{y+\lambda}{a^2},$$

φ étant l'angle que forme la tangente avec l'axe des x; cette équation ne paraît pas pouvoir s'intégrer, et, dans ce qui suit, nous devrons nous contenter d'approximations.

Nous placerons l'origine au sommet de la courbe, en prenant pour origine l'horizontale de ce point.

Si une étendue assez grande φ reste suffisamment petite pour que l'on puisse négliger le carré de cet angle, ce qui permet de supposer $ds = dx$, $\varphi = \sin\varphi = \operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx}$, l'équation (a) prend alors la forme suivante,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{(y+\lambda)}{a^2} = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$y + \lambda = A_1 \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) d\omega$$
$$+ A_2 \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) \log(x\sin^2\omega)\, d\omega,$$

A_1 et A_2 étant deux constantes arbitraires. Mais A_2 est nul, car autrement y serait infini pour $x = 0$, et, comme y est nul pour $x = 0$, il vient

$$(b) \qquad y + \lambda = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) d\omega \quad (^1),$$

d'où

$$(c) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi a} \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} - e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) \cos\omega\, d\omega,$$

et l'on voit que $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $x = 0$, ce qui devait être.

Supposons que la goutte soit assez large pour qu'une valeur de φ_1 de φ, inférieure à 20°, corresponde à une valeur l relativement grande de x, et soit y_1 la valeur correspondante de y. Nous aurons

$$(d) \qquad \begin{cases} y_1 + \lambda = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\pi \left(e^{\frac{l}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{l}{a}\cos\omega}\right) d\omega \\ \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi a} \int_0^\pi \left(e^{\frac{l}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{l}{a}\cos\omega}\right) \cos\omega\, d\omega. \end{cases}$$

(1) Poisson (p. 213) pose une formule tout autre, sans faire connaître de quelle manière il y est arrivé; mais elle est inexacte, car elle ne satisfait pas à l'équation différentielle.

Mais, comme λ est inconnue, la valeur de l ne peut pas être fixée *a priori* et est subordonnée à la solution du problème.

L'équation (a) donne alors, par approximation,

$$(e) \qquad \sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{1}{l}\right) = \frac{y+\lambda}{a^2}.$$

Quoique sous une forme plus simple, elle ne paraît pas pouvoir s'intégrer. Nous sommes ainsi réduit à déterminer des valeurs approchées de φ et de x en fonction de y, en négligeant le carré de $\frac{1}{l}$.

Si nous posons $\varphi = u + \frac{v}{l}$, et si nous identifions après la substitution dans (c) les termes indépendants et dépendants de $\frac{1}{l}$, nous trouvons

$$(f) \qquad \sin u \frac{du}{dy} = \frac{y+\lambda}{a^2},$$

$$(f') \qquad \frac{dv}{dy}\sin u + v\cos u\frac{du}{dy} = 0.$$

Si C' est une constante arbitraire, la dernière de ces équations donne

$$v = \frac{C'}{\sin u},$$

et l'on a, par suite,

$$(g) \qquad \sin\varphi = \sin u + \frac{C'}{l}\cot u.$$

Mais u déduit de (f) renfermera une constante arbitraire C, et l'on sera libre d'établir entre C et C' telle relation que l'on jugera convenable, pourvu que $y = y_1$, l'équation (g) donne $\varphi = \varphi_1$. Il nous est donc permis de supposer $C' = 0$, et, en intégrant l'équation (f), on trouve

$$\cos u = \cos\varphi = \cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2 - (y_1+\lambda)^2],$$

d'où

$$(h) \qquad x - l = \int_{y_1}^{y}\cot\varphi\, d\varphi = \int_{y_1}^{y}\frac{\cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2 - (y_1+\lambda)^2]}{\sqrt{1 - \left\{\cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2 - (y_1+\lambda)]^2\right\}^2}}\,dy,$$

intégrales réductibles en fonctions elliptiques.

Soient h la hauteur de la goutte ou l'ordonnée du point de raccordement correspondant à $\cos\varphi = -\cos\alpha$. Nous aurons

$$(i) \qquad \cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(h+\lambda)^2 - (y_1 + a)^2] = -\cos\alpha,$$

et l'équation (h) fera connaître la valeur x' de x du point de raccordement.

On conçoit que l'on puisse exprimer que le volume de la goutte est donné, ce qui établira entre λ et l une relation qui, jointe à la seconde des formules (2), permettra de déterminer ces constantes. Il faudra s'assurer ultérieurement que l est relativement grand, comme on l'a supposé.

14. *Liquides soustraits à l'action de la pesanteur.* — Dans ce qui suit, nous considérerons avec M. Plateau une masse liquide en suspension dans un autre liquide de même densité avec laquelle elle ne peut se mélanger.

Si la masse considérée est en repos, elle affectera la forme sphérique. Mais si on lui imprime un mouvement de rotation, selon que la vitesse sera au-dessous ou au-dessus d'une certaine limite, elle deviendra un sphéroïde aplati, ou elle se décomposera en sphéroïde et un anneau tournant autour de ce sphéroïde.

Soient n la vitesse de rotation; x la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe, le potentiel de la force centrifuge sera $\frac{n^2x^2}{2}$; si l'on attribue à a la même signification que ci-dessus, et si l'on pose $b^3 = \frac{2a^2\gamma}{n^2}$, l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda),$$

λ étant une constante.

Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda),$$

ou, en multipliant par x,

$$\frac{dx \sin\varphi}{dx} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda).$$

On déduit de là, en appelant C une constante arbitraire,

$$(2) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{b^3}\left(\frac{x^3}{4} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{C}{x}\right)$$

et

$$y = \int \operatorname{tang}\varphi\, dx = \frac{1}{b^3}\int \frac{\frac{x^3}{4} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{C}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^6}\left(\frac{x^3}{4} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{C}{x}\right)^2}}\, dx$$

pour l'intégrale de l'équation proposée.

15. *La surface diffère peu d'une sphère.* — C'est ce qui a lieu quand la vitesse angulaire est suffisamment faible, et alors l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} - \operatorname{tang} u \frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{c^3}{b^3}(\sin^2\theta + \lambda) = 0,$$

et a pour intégrale

$$u = B\sin\theta - \frac{\lambda c^3}{2b^3} + A\left(-1 + \sin\theta \log \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$- \frac{c^3}{4b^3}\sin\theta \log \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} + \frac{c^3}{4b^3}\sin^2\theta.$$

Pour que u ne soit pas infini pour $\theta = 90^\circ$, il faut que les termes $\log \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}$ disparaissent ou que l'on ait

$$A = \frac{c^3}{4b^3},$$

et alors, en comprenant la constante de $-\frac{r^3}{4b^3}$ dans l'indéterminée $-\frac{7r^3}{2b^3}$, il vient

$$u = \mathrm{B}\sin\theta - \frac{\lambda r^3}{2b^3} + \frac{r^3}{4b^3}\sin^2\theta$$

et

$$\frac{du}{d\theta} = \mathrm{B}\cos\theta - \frac{r^3}{2b^3}\sin\theta\cos\theta.$$

Pour que la tangente au sommet soit perpendiculaire à l'axe de rotation, il faut que B soit nul ou que l'on ait $\mathrm{B} = 0$, et par suite

$$u = -\frac{\lambda r^3}{2b^3} + \frac{r^3}{4b^3}\sin^2\theta.$$

Si nous prenons pour r le rayon de la sphère équivalent au sphéroïde, il faut que $\int_0^{\pi} u^2\,d\theta$ soit nul, ce qui donne

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

et

$$u = -\frac{r^3}{4b^3}\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta\right).$$

En coordonnées rectangulaires, nous aurons pour l'équation de la surface,

$$x^2 + y^2 = r^2(1+u)^2 = r^2(1+2u)$$

ou

$$x^2 + y^2 = r^2\left(1 - \frac{r^3}{4b^3}\right) + \frac{r^3}{b^3}\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

ou encore, aux termes près du second ordre,

$$x^2 + y^2 = r^2\left(1 - \frac{r^3}{4b^3}\right) + \frac{r}{b^3}x^2,$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde en révolution aplati dont il est facile de trouver les axes.

16. *La surface diffère d'un tore.* — Nous supposerons qu'il est ainsi, sauf vérification ultérieure, lorsque la distance de la masse à l'axe de rotation est très grande par rapport aux dimensions transversales de l'anneau.

Soient c le centre du cercle générateur; l sa distance à l'axe, nous avons

$$x = l + r \sin\theta;$$

en désignant par C une constante

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin\theta}{l + r\sin\theta} = \frac{1}{l}\left[\sin\theta - \frac{r}{2l}(1 - \cos 2\theta)\right].$$

Par suite,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \left(\frac{2lr^2}{b^3} - \frac{1}{l}\right)\sin\theta - \frac{r^2}{2l^2}\cos 2\theta - C = 0;$$

d'où

$$u = C + \frac{1}{2}\left(\frac{2lr^2}{b^3} + \frac{r}{l}\right)\theta\cos\theta - \frac{r^2}{8l^2}\cos 2\theta + A\cos\theta + B\sin\theta,$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{2lr^2}{b^3} - \frac{r}{l}\right)(\cos\theta - \theta\sin\theta) + \frac{r^2}{4l^2}\sin 2\theta - A\sin\theta + B\cos\theta.$$

On doit avoir $\frac{du}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 90^\circ$, d'où

$$A = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2lr^2}{b^3} - \frac{r}{l}\right).$$

Par suite,

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{2lr^2}{b^3} - \frac{r}{l}\right)\left(\cos\theta - \theta\sin\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right) + \frac{r^2}{8l^2}\cos 2\theta + B\sin\theta + C;$$

B et C restent indéterminés, en raison même de l'origine qui n'a pas été fixée. Si nous la plaçons au milieu du diamètre horizontal, u devra avoir la même valeur pour $\theta = 90^\circ$ et $\theta = -90^\circ$, d'où

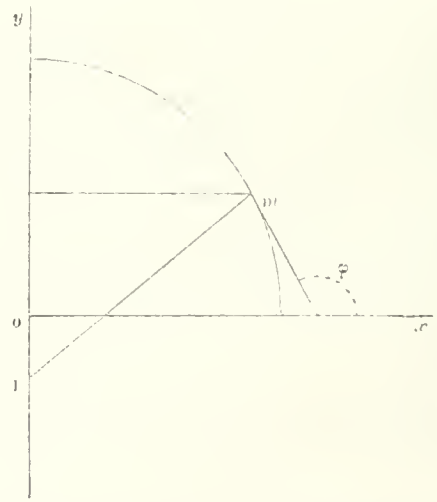
$$C = 0, \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{2br^2}{b^3} - \frac{r}{l}\right)H + \frac{r^2}{8l^2}.$$

§ III. — *Des liquides uniquement soumis à leurs actions mutuelles.*

Si l'on introduit une masse déterminée M d'un liquide A dans un milieu formé d'un autre liquide B de même densité que le précédent, mais avec lequel il ne peut pas se mélanger, A se trouve dans les conditions d'un liquide uniquement soumis à ses actions mutuelles, et c'est ainsi que M. Plateau a obtenu expérimentalement, suivant les conditions qu'il imposait à M, les différentes formes que peut affecter un solide de révolution dont la moyenne courbure est constante. Nous avons ainsi à nous poser un problème résolu déjà depuis longtemps par bien des savants, mais en nous efforçant à en simplifier la solution.

17. *Équation générale des surfaces de révolution dont la moyenne courbure est constante.* — L'équation (1) du n° **2** nous donnera l'équa-

Fig. 6.



tion différentielle de la surface de révolution que peut affecter une masse liquide soustraite à l'action des forces extérieures en y supposant $\mathcal{F} = 0$, et, en représentant la constante $\frac{C}{\mu}$ par $2A$, nous aurons

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 2A.$$

Soient (*fig.* 6)

Oy l'axe de révolution;
Ox la perpendiculaire en un point quelconque déterminant avec Ox une section méridienne que nous allons considérer;
φ l'angle que forme avec Ox la tangente en un point m dont les coordonnées sont x et y;
$m\mathrm{I}$ la normale en m limitée à Ox;
s l'arc de la courbe mesurée à partir de Oy.

Nous avons

$$dx = -ds\cos\varphi, \quad \frac{1}{\mathrm{R}} = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx}, \quad \frac{1}{\mathrm{R}'} = \frac{1}{m\mathrm{I}} = \frac{\sin\varphi}{x},$$

d'où

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{x} = 2\mathrm{A}$$

ou

$$\frac{dx\sin\varphi}{dx} = 2\mathrm{A}x$$

En intégrant et désignant par B une constante arbitraire, on trouve

$$(1) \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}}{x}.$$

Remarque. — Si la surface est fermée, on a $\varphi = 0$ pour $x = 0$, par suite $\mathrm{B} = 0$ et

$$\sin\varphi = \mathrm{A}x.$$

On déduit de là, en désignant par C une constante,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{A}x}{\sqrt{1 - \mathrm{A}^2x^2}},$$

$$y + \mathrm{C} = -\frac{1}{\mathrm{A}}\sqrt{1 - \mathrm{A}^2x^2}$$

et enfin

$$(y + \mathrm{C})^2 + x^2 = \frac{1}{\mathrm{A}^2},$$

équation d'un cercle. D'où il suit que *la sphère est la seule surface de révolution à courbure moyenne constante qui soit fermée.*

Revenons maintenant à l'équation (1), et désignons par x_1 et x_2 les

valeurs de x qui correspondent à $\varphi = 90^\circ$, $\varphi = -90^\circ$. Nous aurons

$$x_1 = Ax_1^2 + B,$$
$$-x_2 = Ax_2^2 + B,$$

d'où

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2}, \quad B = -\frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

et, en substituant x_1 et x_2 aux constantes A et B, nous aurons

$$\sin\varphi = \frac{x^2 - x_1 x_2}{(x_1 - x_2)x},$$
$$\cos\varphi = \pm \frac{1}{x(x_1 - x_2)}\sqrt{(x_1^2 - x^2)(x^2 - x_2^2)},$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{x^2 - x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 - x)(x^3 - x_2^2)}}.$$

Si nous posons

$$x^2 = x_1^2 \cos^2\psi + x_2^2 \sin^2\psi,$$

ψ étant un angle auxiliaire, ce qui est permis puisque x_1 et x_2 sont les valeurs extrêmes des x, nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{x_1^2 \cos^2\psi + x_2^2 \sin^2\psi - x_1 x_2}{(x_1^2 - x_2^2)\sin\psi\cos\psi} = \frac{dy}{dx},$$
$$dx = -\frac{(x_1^2 - x_2^2)\sin\psi\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi}},$$

d'où

$$dy = \pm\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin\psi}\, d\psi \mp \frac{x_1 x_2\, d\psi}{\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi}}.$$

Si nous plaçons l'origine des coordonnées de manière que l'on ait $y = 0$ pour $x = 0$, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \pm y = x_1 &\left\{ E\left[\sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2}}\,\varphi\right] - E\left[\sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2}}\,\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\ &- x_2\left[F\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}}\,\varphi\right)\right] - F\left[\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}}\,\frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons ainsi deux systèmes de courbes selon que x_2 sera de même signe que x_1 ou sera de signe contraire.

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle :

PAR M. H. POINCARÉ,
Ingénieur des Mines.

Une théorie complète des fonctions définies par les équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que dans la grande généralité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeureraient insolubles.

Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis.

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan*. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étu-

dier cette fonction *dans toute l'étendue du plan*. Dans cette recherche, notre point de départ sera évidemment ce que l'on sait déjà de la fonction étudiée *dans une certaine région du plan*.

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

1° Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;

2° Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.

Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe on peut en déterminer exactement un certain nombre de points.

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant :

Construire les courbes définies par des équations différentielles.

Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction et elle y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent la fonction cherchée dans une certaine région du plan, et que la principale difficulté qui se présente est de trouver un guide sûr pour passer d'une région où la fonction est représentée par une série à une autre région du plan où elle est exprimable par une série différente.

D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra

s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites?

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

Dans ce qui va suivre, je considère les courbes définies par une équation de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont deux polynômes entiers en x et en y. Ces courbes, je les appelle des *caractéristiques*.

Si l'on considère les deux portions d'une même caractéristique qui se trouvent de part et d'autre d'un de ses points, on aura divisé cette caractéristique, à moins qu'elle ne soit une courbe fermée, en deux *demi-caractéristiques* distinctes. Ces deux demi-caractéristiques joueront, dans ce qui va suivre, un rôle de quelque importance. Par exemple, supposons que la caractéristique soit la spirale logarithmique

$$\rho = e^{\omega},$$

on pourra la diviser en deux demi-caractéristiques, comprenant, la première, tous ceux de ses points pour lesquels

$$\rho < 1,$$

la seconde, tous les points pour lesquels

$$\rho > 1.$$

Afin d'éviter les difficultés que pourrait présenter l'étude des branches infinies, nous supposerons que les courbes sont projetées gnomoniquement sur une sphère. Soient un plan P, et un point quelconque (x, y) dans ce plan : si l'on considère une sphère quelconque divisée en deux hémisphères par un plan parallèle au plan P et que nous appellerons plan de l'équateur; si l'on joint le centre de la sphère au point (x, y), la droite, ainsi déterminée, coupera la sphère en deux points diamétralement opposés; nous appellerons $(x, y, 1)$ celui qui est situé dans le premier hémisphère, $(x, y, 2)$ celui qui est situé dans le second hémisphère.

Toute ligne droite du plan P se projettera sur la sphère suivant un grand cercle. Aussi, quand nous parlerons de la tangente en un point à la caractéristique, il s'agira de l'arc de grand cercle qui touche la caractéristique en ce point.

Tout grand cercle coupe l'équateur en deux points ω_1 et ω_2; l'angle de direction du grand cercle qui passe par les points diamétralement opposés ω_1 et ω_2 sera l'arc compris entre ω_1 et un point fixe de l'équateur. Le coefficient angulaire sera la tangente de l'angle de direction.

Enfin, les points d'inflexion d'une caractéristique seront les points où elle est osculatrice à un grand cercle.

Il est évident que, dans ces conditions, si l'on excepte quelques points singuliers, par tous les points de la sphère passe une caractéristique et une seule, et le coefficient angulaire de la tangente est donné par l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

D'ailleurs, tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de donner certaines définitions et certains théorèmes généraux qui seront d'un grand secours dans l'étude qualitative des courbes sphériques.

Considérons d'abord des courbes sphériques ne présentant ni point double, ni point d'arrêt.

Nous appellerons *cycle sphérique* une courbe telle qu'après en avoir parcouru un arc fini on revienne au point de départ : par exemple, un petit ou un grand cercle.

Nous appellerons *spirale sphérique* une courbe qui coupe un cycle sphérique en un seul point, par exemple la loxodromie, qui coupe les parallèles en un seul point.

Un cycle sphérique divise la surface de la sphère en deux régions que nous appellerons, l'une, l'*intérieur* du cycle ; l'autre, l'*extérieur* ; on ne peut passer de l'une à l'autre sans couper le cycle.

Si l'on joint deux points d'une caractéristique par un arc de courbe quelconque qui n'ait avec la caractéristique d'autre point commun que ses deux extrémités, l'arc de courbe et l'arc de caractéristique compris entre les deux points formeront, par leur ensemble, un cycle sphérique. Par exemple, si l'on joint par un arc de grand cercle les deux extrémités d'un arc de petit cercle, ces deux arcs formeront un cycle fermé.

Mais il peut se présenter deux cas.

Premier cas. — Les deux branches de courbes formées par la caractéristique prolongée au delà des deux points que l'on a réunis par un arc de courbe quelconque, sont toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures au cycle formé par les deux arcs.

Dans ce cas, nous dirons que l'arc de courbe *sous-tend* l'arc de caractéristique.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas des deux extrémités d'un arc de petit cercle réunies par un arc de grand cercle.

Deuxième cas. — Les deux branches de courbes formées par la caractéristique, prolongée au delà des deux points qu'on a réunis par un arc de courbe quelconque, sont, l'une intérieure, l'autre extérieure au cycle formé par les deux arcs.

Dans ce cas, nous dirons que l'arc de courbe *sur-tend* l'arc de caractéristique.

Supposons, par exemple, que la caractéristique soit une loxodromie :

elle coupera un méridien quelconque en une infinité de points. Considérons parmi ces points d'intersection deux points consécutifs et concevons qu'on les joigne d'une part par un arc de loxodromie, d'autre part par un arc de méridien, l'arc de méridien sur-tendra l'arc de loxodromie.

De la définition même des cycles on peut tirer immédiatement les résultats suivants :

1° Deux cycles se coupent en un nombre pair ou infini de points;

2° Toute courbe algébrique se compose d'un ou plusieurs cycles;

3° Toute courbe algébrique coupe un cycle quelconque en un nombre pair ou infini de points.

Théorème I. — *Si l'on divise une caractéristique, qui n'offre ni point double, ni point d'arrêt, en deux demi-caractéristiques, si l'une de ces demi-caractéristiques ne coupe aucun des cycles algébriques qu'en un nombre fini de points, la caractéristique donnée est un cycle.*

En effet, construisons une courbe plane C définie de la manière suivante : l'abscisse d'un point β_i quelconque de la courbe C sera l'arc de la caractéristique, compté depuis un point fixe α_0 jusqu'à un point α_i correspondant à β_i, et l'ordonnée de β_i sera l'angle de direction de la tangente à la caractéristique au point α_i.

1° A un point β_i de la courbe C correspond toujours un point α_i et un seul de la caractéristique;

2° La caractéristique n'ayant pas de point d'arrêt, la courbe C n'en aura pas non plus;

3° A un point α_i de la caractéristique correspond : ou un point β_i de la courbe C, si la caractéristique n'est pas un cycle; ou une infinité de points β_i si la caractéristique est un cycle;

4° La courbe C ne coupe qu'en un point les droites parallèles à l'axe des y;

5° A l'une des demi-caractéristiques correspond la partie de la courbe C située à droite de l'axe des y; à l'autre, la partie située à gauche de cet axe. Nous supposerons, pour fixer les idées, que la demi-caractéristique qui, d'après hypothèse, ne coupe aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points est celle qui correspond à la demi-courbe C, située à droite de l'axe des y.

Première hypothèse. — Il y a sur la demi-courbe C une infinité de points β_i correspondant à des points α_i situés sur l'équateur.

Comme par hypothèse la demi-caractéristique considérée ne coupe l'équateur (qui est un cycle algébrique) qu'en un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de points α_i sur l'équateur. Il faut donc qu'à un point α_i correspondent un nombre infini de points β_i, c'est-à-dire que la caractéristique soit un cycle.

Deuxième hypothèse. — Il y a sur la demi-courbe c une infinité de points β_i où la tangente à la courbe C est parallèle à l'axe des x.

C'est dire qu'il y a une infinité de points β_i correspondant à des points α_i, qui sont des points d'inflexion de la caractéristique. Or le lieu des points d'inflexion des caractéristiques est une courbe algébrique ; donc, par suite de l'hypothèse faite à l'énoncé du théorème, il y a seulement un nombre fini de points d'inflexion à la caractéristique donnée. Il faut donc encore qu'à un point α_i corresponde une infinité de points β_i, c'est-à-dire que la caractéristique soit un cycle.

Si l'on suppose qu'aucune des hypothèses 1 et 2 ne sont remplies, quand l'abscisse du point β_i sera plus grande qu'une certaine valeur x_0, ce point correspondra à un point α_i, qui sera toujours dans un même hémisphère, dans le premier hémisphère par exemple, et l'ordonnée de β_i ira toujours en décroissant ou toujours en croissant, toujours en croissant par exemple. On se trouve donc en présence d'un troisième cas qui comporte lui-même deux hypothèses.

Troisième hypothèse. — Quand x varie depuis x_0 jusqu'à l'infini, l'ordonnée de β_i, c'est-à-dire l'angle de direction de la tangente à la caractéristique, va toujours en croissant, mais en restant plus petit qu'une quantité donnée.

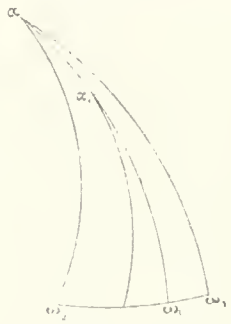
Soient

β_1 le point de la courbe C dont l'abscisse est x_0 ;
α_1 le point correspondant de la caractéristique ;
$\alpha_1\omega_1$ la tangente à la caractéristique en α_1 ;
ω_1 le point où $\alpha_1\omega_1$ rencontre l'équateur ;
α_i un point quelconque de la caractéristique correspondant à un point β_i situé à droite de β_1 ;

$\alpha_i \omega_i$ la tangente en ce point ;
ω_i le point où cette tangente rencontre l'équateur.

Quand α_i s'avancera sur la caractéristique, ω_i se déplacera vers la droite, mais en restant toujours sur l'arc d'équateur $\omega_1 \omega_2$; la demi-caractéristique $\alpha_1 \alpha_i$, qui ne peut franchir l'équateur, est convexe par

Fig. 1.



hypothèse, et tout entière comprise dans le triangle sphérique $\alpha_1 \omega_1 \omega_2$, c'est-à-dire que sa longueur curviligne reste toujours plus petite que $\alpha_1 \omega_1 + \omega_1 \omega_2$, c'est-à-dire qu'elle est finie, ce qui est absurde; la troisième hypothèse est donc inadmissible.

Quatrième hypothèse. — Quand x varie depuis x_0 jusqu'à l'infini, l'ordonnée du point β_i, c'est-à-dire l'angle de direction de la tangente à la caractéristique, va toujours en croissant jusqu'à l'infini.

C'est-à-dire que l'angle de direction de la tangente à la caractéristique peut prendre toutes les valeurs

$$y_0 + n\pi,$$

où y_0 est une constante donnée et n un nombre positif entier quelconque. C'est dire que la tangente de l'angle de direction, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique, est égale à

$$\operatorname{tang} y_0$$

pour un nombre infini de points β_i différents.

Or le lieu des points où le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique est égal à $\operatorname{tang} \gamma_0$ est une courbe algébrique qui ne peut, d'après l'hypothèse, rencontrer la demi-caractéristique qu'en un nombre fini de points α_i. Il faut donc encore ici qu'à un point α_i correspondent une infinité de points β_i, c'est-à-dire que la caractéristique donnée soit un cycle.

En résumé, des quatre hypothèses que l'on peut faire, la première, la deuxième et la quatrième conduisent à ce résultat, que la caractéristique est un cycle; la troisième est inadmissible.

Le théorème est donc démontré.

Définition. — Nous appellerons *polycycle* une courbe fermée comme le cycle, mais présentant des points doubles.

Exemple : intersection de la sphère avec un cylindre qui lui est tangent en un point

Système topographique. — Si l'on trace sur la sphère un système de cycles et de polycycles tel, que par chacun des points de la sphère passe un cycle ou un polycycle, et un seul, excepté en quelques points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle, nous dirons que ce système de cycles est un *système topographique*, parce qu'il est analogue au système des courbes de niveau d'un terrain.

Les points doubles des polycycles sont alors analogues aux *cols* de ce terrain, les points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle sont analogues aux *fonds* et aux *sommets* du terrain; de sorte que nous appellerons ces divers points : *cols*, *fonds* et *sommets* du système.

Par exemple, le système des courbes

$$f(x, y) = \text{const.},$$

où f est un polynôme entier en x et en y, si ces courbes ne coupent pas l'équateur, est un système topographique. Les cols sont les points où l'on a à la fois

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} > 0;$$

les sommets sont les points où l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{dx\,dy}{d^2f}\right)^2 = \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} < 0, \quad \frac{d^2f}{dx^2} > 0;$$

les fonds sont les points où l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{dx\,dy}{d^2f}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} < 0, \quad \frac{d^2f}{dx^2} < 0.$$

De même, si l'on a entre z, x et y une relation algébrique

$$f(z, x, y) = 0,$$

telle que l'on n'ait jamais

$$\frac{df}{dz} = 0,$$

et que z ne puisse rester fini et réel quand x et y sont infinis et réels, le système des courbes

$$z = \text{const.}$$

est un système topographique.

Par exemple, soit

$$f(z, x, y) = (z - x)^2 - 2(x^2 + y^2 + 1) = 0;$$

$\frac{df}{dz}$ ne peut être nul que si

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

ce qui est impossible.

De plus, si l'on considère z comme une constante, les termes du degré le plus élevé s'écrivent

$$-(x^2 - 2y^2),$$

c'est-à-dire que les courbes $z = \text{const.}$ ne coupent pas l'équateur, c'est-à-dire que ces courbes forment un système topographique.

Le lieu des points où chacun des cycles d'un système topographique est tangent à une caractéristique s'appellera la *courbe des contacts*.

Si le système topographique est algébrique, la courbe des contacts sera elle-même une courbe algébrique.

Si l'on considère un système topographique et l'un des polycycles du système correspondant à un des cols du système, une partie des fonds et des sommets est à l'extérieur du polycycle, une autre partie à l'intérieur, de sorte que chaque col *distribue d'une certaine manière* les fonds et les sommets du système.

Deux systèmes topographiques sont *analogues* lorsqu'ils ont mêmes cols, mêmes fonds, mêmes sommets et que les fonds et les sommets sont *distribués de la même manière par les cols*.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DE LA SPHÈRE.

Avant d'étudier les propriétés des caractéristiques dans toute l'étendue de la sphère, il faut rappeler les résultats déjà acquis relativement à l'étude de ces courbes dans une région limitée de la sphère. Les principaux théorèmes qui se rapportent à cette étude sont énoncés et démontrés dans divers Mémoires de Cauchy, intitulés *Mémoires sur le calcul des limites*, et insérés aux tomes XIV, XV et XVI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans le célèbre Mémoire de MM. Briot et Bouquet, inséré dans le Tome XXXVI du *Journal de l'École Polytechnique*. Je me suis moi-même occupé de cette question dans une Note qui se trouve dans le XLVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* et dans une Thèse pour le doctorat que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris.

Supposons d'abord que le point autour duquel on veut étudier les caractéristiques soit

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

X et Y, qui sont des polynômes en x et en y, peuvent être également considérés comme des polynômes en $x - \alpha$ et $y - \beta$.

De sorte que

$$X = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(y - \beta) + \ldots,$$
$$Y = b_0 + b_1(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + \ldots.$$

Premier cas. — a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois ; supposons, par exemple,

$$a_0 \gtrless 0;$$

l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} f(x, y),$$

où f est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et $y - \beta$

Donc, en vertu du théorème démontré par Cauchy (*Comptes rendus*, t. XIV), y peut s'exprimer par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et se réduisant à β pour $x = \alpha$.

Donc, par le point (α, β) passe une caractéristique et une seule.

Deuxième cas. — $a_0 = b_0 = 0$.

Mais a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont pas nuls à la fois.

Le point (α, β) est alors un point singulier ordinaire. Commençons par rappeler un théorème relatif à ces points singuliers, théorème que j'ai démontré dans ma Thèse inaugurale.

Si l'équation

$$(5) \qquad (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1 a_2 = 0$$

a deux racines différentes, λ_1 et λ_2 ;

Si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

est de la forme

$$z_1^{k_1} z_2^{-k_2} = \text{const.},$$

où z_1 et z_2 sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$, $y - \beta$ et s'annulant pour

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Supposons que le point (x, y) se rapproche infiniment du point (α, β), de telle façon que

$$\lim \frac{y-\beta}{x-\alpha} = \mu;$$

le coefficient angulaire de la tangente en ce point (x, y) aura pour limite

$$\frac{b_1 + b_2\mu}{a_1 + a_2\mu}.$$

Donc la limite de la droite qui joint les points (x, y) et (α, β) et la limite de la tangente à la caractéristique au point (x, y) forment un faisceau homographique.

Les droites doubles de ce faisceau sont données par l'équation

$$\mu(a_1 + a_2\mu) = b_1 + b_2\mu.$$

Soient μ_1 et μ_2 les deux racines de cette équation; on calculera aisément λ_1 et λ_2 en fonctions rationnelles de a_1, a_2, b_1, b_2, μ_1 et μ_2.

Maintenant on peut diviser le deuxième cas en quatre cas subordonnés principaux.

Premier cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles, et deux droites conjuguées quelconques du faisceau sont ou toutes deux dans l'angle aigu formé par les deux droites doubles, ou toutes deux dans l'angle obtus.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont réels et leur rapport est positif; le théorème que nous avons rappelé en commençant est donc applicable, et l'intégrale générale s'écrit

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1, z_2 sont des fonctions réelles de x et de y s'annulant pour

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

pendant que λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels positifs.

Il s'ensuit que toutes les caractéristiques vont passer par le point

singulier (α, β), pourvu qu'elles pénètrent dans une région de la sphère assez voisine de ce point pour que z_1 et z_2 soient convergents.

Un pareil point singulier s'appellera un *nœud*.

Soit, par exemple, à étudier les caractéristiques qui satisfont à l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

dans le voisinage du point

$$x = y = 0.$$

L'équation générale de ces caractéristiques s'écrira

$$y = kx^2,$$

où x^2 est une constante. Dans le plan, cette équation représente une série de paraboles ayant même axe et ayant leur sommet à l'origine; sur la sphère, cette même équation représentera les intersections de la sphère avec les cônes, qui ont le centre de la sphère pour sommet et ces paraboles pour base.

Toutes ces intersections passent évidemment par le point

$$x = y = 0.$$

Deuxième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles; mais deux droites conjuguées du faisceau sont situées de part et d'autre de ces deux droites doubles.

Dans ce cas, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est réel et négatif, et le théorème dont nous avons parlé n'est plus applicable.

Mais MM. Briot et Bouquet ont fait voir, dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIe Cahier qu'il passe par le point (α, β) deux caractéristiques et deux seulement.

Un pareil point singulier s'appellera un *col*.

Soit, par exemple, à étudier dans le voisinage de l'origine des caractéristiques définies par l'équation

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

L'intégrale générale s'écrit

$$xy = \text{const.}$$

et les seules caractéristiques qui passent par le point

$$x = y = 0$$

sont les deux grands cercles

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Troisième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires, et ce faisceau ne se réduit pas à un système de droites en involution.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont deux imaginaires conjuguées et leur rapport est imaginaire. Le théorème général s'applique et l'intégrale générale s'écrit

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1 et z_2, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées.

Soit

$$z_1 = \xi + i\eta, \quad \lambda_1 = \Upsilon + i\delta$$
$$z_2 = \xi - i\eta, \quad \lambda_2 = \Upsilon - i\delta.$$

L'intégrale générale s'écrit alors

$$(\xi^2 + \eta^2)^\delta \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right)^{i\gamma} = \text{const.}$$

Les courbes $\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$ (où ξ et η sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et $y - \beta$, et s'annulant pour $x = \alpha, y = \beta$) sont évidemment des cycles qui ne se coupent en aucun point et qui forment dans la région voisine du point (α, β) un système topographique dont le point (α, β) est un sommet.

Or, si l'on remarque que les équations

$$\xi^2 + \eta^2 = A, \quad \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right)^i = B$$

ne donnent pour ξ et η, et par conséquent pour x et y, qu'un seul système de valeurs réelles, on reconnaîtra que les caractéristiques ne coupent les cycles

$$\xi^2 + \eta^2 = A$$

qu'en un seul point et que, par conséquent, ces caractéristiques ne sont autre chose que des spirales; un point qui parcourt ces spirales dans un certain sens va en se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Un pareil point singulier s'appellera un *foyer*.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y},$$

dont l'intégrale générale est

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^i = \text{const.}$$

Si l'on passe aux coordonnées polaires, cette intégrale devient

$$\rho^2 e^{-2\omega} = \text{const.},$$

ce qui nous donne, dans le plan, une spirale logarithmique, et, par conséquent, sur la sphère, une spirale sphérique.

Quatrième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires et ce faisceau se réduit à un système de droites en involution.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées, mais leur rapport est égal à -1. Le théorème que nous avons rappelé au début n'est donc pas applicable en général.

Ce quatrième cas est plus particulier que les précédents et il ne se présentera pas si X et Y sont *les polynômes les plus généraux de leur degré*. Bornons-nous donc à quelques remarques.

D'abord, il est impossible qu'une branche de caractéristique vienne passer par le point α, β, puisque sa tangente devrait être précisément l'une des droites doubles de l'involution qui sont imaginaires.

Mais, d'après ce qu'on verra plus loin, toute caractéristique est un cycle ou une spirale; donc, ou bien les caractéristiques seront des spirales, et un point qui les parcourrait tournerait autour du point (α, β) en s'en rapprochant indéfiniment : le point (α, β) serait alors encore un *foyer;* ou bien les caractéristiques forment un système topographique dont (α, β) est un sommet, et alors le point (α, β) est un *centre*.

C'est ce qui arrive quand le théorème que nous énoncions au début est applicable, malgré la valeur négative de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

En effet, dans ce cas, l'intégrale s'écrit

$$z_1 z_2 = A,$$

où

$$z_1 = \xi + i\eta,$$
$$z_2 = \xi - i\eta;$$

c'est-à-dire

$$\xi^2 + \eta^2 = A;$$

et les caractéristiques forment évidemment, dans ce cas, un système topographique de cycles.

Par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

a pour intégrale générale

$$x^2 + y^2 = A.$$

Cas particuliers laissés de côté. — Dans ce qui précède, on a laissé de côté les cas particuliers où

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_1 = 0,$$

cas qui ne se présenteront pas si X et Y sont *les polynômes les plus généraux de leur degré.*

Or, pour que

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

il faut et il suffit que

$$(a_1 + b_2)^2 - b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0.$$

Dans ce cas, MM. Briot et Bouquet ont fait voir qu'une infinité de

caractéristiques passent par le point (α, β), c'est-à-dire qu'on a encore affaire à un *nœud*.

Les cinq cas précédents comprennent tous les points singuliers α, β, tels que les deux courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

s'y coupent en un seul point et non en plusieurs points confondus. Ces points singuliers s'appelleront *points singuliers de première espèce*, et l'on a vu qu'il y avait quatre sortes de pareils points : les nœuds, les cols, les foyers et les centres.

Reste à examiner les cas où

$$\lambda_1 = 0$$

et ceux où

$$a_1 = a_2 = 0$$

ou

$$b_1 = b_2 = 0.$$

Ces cas se présentent quand les courbes $X = Y = 0$ se coupent en plusieurs points confondus au point (α, β).

En effet, dire que

$$a_1 = a_2 = 0,$$

c'est dire que $X = 0$ offre un point multiple en (α, β).

Dire que

$$b_1 = b_2 = 0,$$

c'est dire que $Y = 0$ offre un point multiple en (α, β).

Dire que

$$\lambda_1 = 0,$$

c'est dire que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

c'est-à-dire que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ sont tangentes au point (α, β).

De pareils points singuliers s'appelleront *points singuliers de seconde espèce*, et il est évident, d'après ce qui précède, qu'ils pourront toujours être considérés comme la limite d'un système de plusieurs points singuliers de première espèce confondus ensemble.

Les particularités que peuvent présenter de pareils points sont trop nombreuses et trop diverses pour que nous les étudiions en détail. Remarquons que de pareils points ne peuvent exister si X et Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré.

Points situés sur l'équateur. — Dans ce qui précède, on a supposé implicitement que α et β restent finis, c'est-à-dire que le point (α, β) n'est pas sur l'équateur.

Mais le cas où α, β est sur l'équateur peut se ramener aisément aux cas déjà étudiés.

Considérons d'abord un point de l'équateur non situé sur le grand cercle

$$x = 0,$$

nous poserons

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z}.$$

Si l'on considère ensuite z et t comme les coordonnées d'un point dans un plan, ce point ne sera autre chose que la projection gnomonique du point (x, y) de la sphère sur un plan parallèle au plan du grand cercle

$$x = 0.$$

Pour le point (α, β) de la sphère, ces coordonnées z et t seront finies, c'est-à-dire qu'on sera ramené aux cas étudiés dans le commencement de ce Chapitre.

Si l'on voulait étudier les caractéristiques dans le voisinage de l'intersection de l'équateur et du grand cercle

$$x = 0,$$

on poserait

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

et l'on raisonnerait de la même manière.

CHAPITRE III.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

THÉORÈME II. — *Tout système de caractéristiques admet des points singuliers.*

Première hypothèse. — Les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

se coupent en des points non situés sur l'équateur.

Dans ce cas, ces points d'intersection sont évidemment des points singuliers

Deuxième hypothèse. — Les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

se coupent en un point situé sur l'équateur.

Supposons que ce point ne soit pas sur le grand cercle

$$x = 0,$$

nous poserons

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

et, si m est le degré de celui des deux polynômes X et Y dont le degré est le plus élevé, nous poserons

$$z^m X = X_1, \quad z^m Y = Y_1.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{dz}{-zX_1} = \frac{dt}{Y_1 - tX_1}.$$

pour $t = \alpha$, $z = 0$; on a, par hypothèse,

$$Y_1 = X_1 = 0,$$

et par conséquent

$$zX_1 = 0, \quad Y_1 - tX_1 = 0,$$

c'est-à-dire que le point

$$t = \alpha, \quad z = 0$$

est un point singulier de l'équation proposée.

Troisième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X est plus grand que celui de Y. Dans ce cas, l'un au moins des deux polynômes X et Y est de degré pair. De plus Y_1 est divisible par z, de sorte que

$$Y_1 = zY_2.$$

Or il est clair que pour

$$z = t = 0$$

on a

$$zX_1 = zY_2 - tX_1 = 0,$$

et que par conséquent le point

$$z = t = 0$$

est un point singulier.

Quatrième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X est inférieur à celui de Y. Dans ce cas on poserait

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

et, en raisonnant comme dans le cas précédent, on ferait voir que

$$z = t = 0$$

est un point singulier.

Cinquième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X et de Y est le même.

Si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et Y, on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

Dans ce cas, le degré de X et de Y étant m, et nécessairement pair, la fonction $xY_2 - yX_2$ est homogène en x et y et de degré $m+1$, et par conséquent de degré impair.

Elle s'annule donc, soit pour $x = 0$, soit pour une certaine valeur finie de $\frac{y}{x}$.

Si elle s'annule pour une certaine valeur α de $\frac{y}{x}$, on aura à la fois pour

$$t = \alpha, \quad z = 0,$$

$$zX_1 = Y_1 - tX_1 = 0$$

quand on aura posé

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

c'est-à-dire que le point

$$t = \alpha, \quad z = 0$$

sera un point singulier.

Si la fonction $xY_2 - yX_2$ s'annule pour $x = 0$, on posera

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

et l'on verra, comme précédemment, que le point

$$t = z = 0$$

est un point singulier.

Sixième hypothèse. — Les courbes X et Y ne se coupent en aucun point. Le degré de X est le même que celui de Y si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et de Y ; on a identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

Cette hypothèse est inadmissible.

En effet, si l'on a identiquement

$$xY_2 = yX_2,$$

X_2 est divisible par x et égal à xX_3, Y_2 est divisible par y et égal

à yY_3, de sorte que l'on a identiquement

$$xyY_3 = yxX_3$$

ou

$$Y_3 = X_3.$$

Maintenant $Y_3 = X_3$ est une fonction homogène de *degré impair* en x et en y; donc elle s'annule soit pour $x = 0$, soit pour une certaine valeur réelle α de $\frac{y}{x}$.

Donc, soit pour $x = 0$, soit pour $\frac{y}{x} = \alpha$, on aurait forcément

$$X_2 = Y_2 = 0,$$

c'est-à-dire que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ se couperaient en un point de l'équateur, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, des six hypothèses que l'on peut faire, la sixième est inadmissible; si l'une des cinq autres est réalisée, l'équation différentielle admet des points singuliers, soit sur l'équateur, soit hors de l'équateur.

Cas général. — On peut, sans nuire à la généralité, supposer :

1° Que les polynômes X et Y sont de même degré;

2° Que si X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et de Y, on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0;$$

3° Que les courbes $X = Y = 0$ ne se coupent nulle part en plusieurs points confondus et ne se coupent pas sur l'équateur;

4° Que l'équation

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

n'ait pas de racines multiples.

Dans ce cas, *l'équateur est toujours une caractéristique*, et tous les points singuliers sont de première espèce. De plus on peut, sans nuire à la généralité, supposer que tous les points singuliers sont des *nœuds*, des *cols* et des *foyers*.

Le nombre des points singuliers est évidemment pair, puisque tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

Le nombre minimum des points singuliers est donc égal à 2, et ce cas peut se présenter de deux manières :

1° Les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

ne se coupent en aucun point ; mais l'équation homogène

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

admet une solution réelle et une seule.

On a alors sur l'équateur deux points singuliers diamétralement opposés. Je dis que ces points singuliers sont toujours des nœuds. Pour le démontrer, il faut étudier les propriétés générales des points singuliers situés sur l'équateur.

Supposons que pour

$$t = \alpha, \quad z = 0$$

on ait

$$zX_1 = Y_1 - tX_1 = 0$$

et

$$X_1 \gtrless 0, \quad Y_1 \gtrless 0.$$

Posons

$$t = u + \alpha,$$

et soit

$$X_1 = z\xi_1 + \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots + \lambda_m u^m,$$
$$Y_1 = z\eta_1 + \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u^2 + \ldots + \mu_m u^m,$$

où ξ_1 et η_1 sont des polynômes entiers en z et en u, et où les λ et les μ sont des constantes. Il vient, en posant

$$\lambda_2 u^2 + \ldots + \lambda_m u^m = \xi_2 u^2,$$
$$\mu_2 u^2 + \ldots + \mu_m u^m = \eta_2 u^2,$$

$$X_1 = u^2\xi_2 + z\xi_1 + \lambda_0 + \lambda_1 u,$$
$$Y_1 = u^2\eta_2 + z\eta_1 + \mu_0 + \mu_1 u;$$

d'où l'on tire

$$Y_1 - tX_1 = z\xi_1 + u^2\xi_2 + (\mu_0 - \lambda_0\alpha) + (\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0)u.$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des polynômes entiers en z et u. L'équation différentielle s'écrit alors, en remarquant que l'on doit avoir $\mu_0 = \lambda_0 \alpha$,

$$\frac{dz}{-z(\lambda_0 + \lambda_1 u + z\xi_1 + u^2\zeta_2)} = \frac{du}{(\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0)u + z\theta_1 + u^2\theta_2},$$

où θ_1 et θ_2 sont des polynômes en z et u.

Les racines de l'équation (5) sont alors

$$-\lambda_0 \quad \text{et} \quad \mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0.$$

Ces deux racines sont réelles.

Donc *tout point singulier situé sur l'équateur est un nœud ou un col.* (C'est ce qu'on devait prévoir, l'équateur étant une caractéristique.)

Pour qu'il soit un nœud, il faut et il suffit que

$$\lambda_0^2 + \lambda_0\lambda_1\alpha - \lambda_0\mu_1 > 0.$$

Or le premier membre de cette inégalité est précisément la valeur que prend pour

$$y = \alpha x$$

l'expression

$$= \frac{1}{x^{2m}}\frac{d}{dy}\left(xY_2^2X_2 - yX_2^2\right).$$

Nous n'en changerons pas le signe en écrivant

$$-\frac{d}{dy}\left(\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}\right),$$

c'est-à-dire que le point singulier

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

sera un col si, quand $\frac{y}{x}$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, l'expression $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ passe du négatif au positif, et qu'il sera un nœud si, quand $\frac{y}{x}$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, l'expression $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ passe du négatif au positif.

Cela posé, nous allons introduire une considération nouvelle qui nous rendra les plus grands services. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la sphère en deux régions, dont l'une, située tout entière dans l'un des hémisphères, s'appellera l'*intérieur du cycle*.

Si le cycle est tout entier dans le premier hémisphère, nous dirons qu'un point mobile décrit le cycle dans le sens positif s'il a constamment l'intérieur du cycle *à sa gauche;* si, au contraire, le cycle était dans le second hémisphère, un point décrirait le cycle dans le sens positif s'il en avait constamment l'intérieur *à sa droite*.

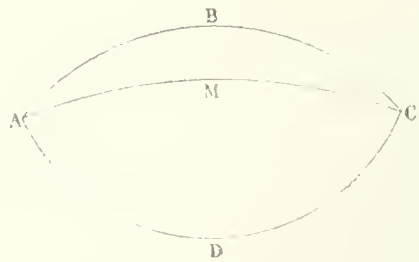
Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$; soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h-k}{2},$$

le nombre i s'appellera l'*indice du cycle*.

Si l'on joint deux points A et C d'un cycle ABCDA par un arc AMC

Fig. 2.



situé tout entier à l'intérieur du cycle, le cycle ABCDA se trouve décomposé en deux cycles ABCMA, AMCDA, et l'on a évidemment

$$\text{ind. ABCDA} = \text{ind. ABCMA} + \text{ind. AMCDA},$$

de sorte qu'on peut ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent.

THÉORÈME III. — *Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice* 0.

En effet, si ce cycle n'est pas coupé par la courbe $X = 0$,

$$h = 0, \quad k = 0, \quad i = \frac{h - k}{2} = 0.$$

Si le cycle est coupé par la courbe $X = 0$, il n'est pas coupé par la courbe $Y = 0$; Y est toujours de même signe et X passe une fois du positif au négatif, une fois du négatif au positif; d'où

$$h = 1, \quad k = 1, \quad i = \frac{h - k}{2} = 0.$$

De même, si la courbe $X = 0$ présentait à l'intérieur du cycle un point multiple d'ordre m, on aurait

$$h = m, \quad k = m, \quad i = \frac{h - k}{2} = 0.$$

THÉORÈME IV. — *Si un cycle infiniment petit contient à son intérieur un point singulier, son indice est égal à* ± 1.

Il est égal à $+1$ si le point singulier est un col; à -1 si le point singulier est un nœud ou un foyer.

En effet, posons

$$y - \beta = \rho \sin\omega, \quad x - \alpha = \rho \cos\omega,$$

et supposons que l'on considère le cycle

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \rho^2,$$

ρ étant une constante *infiniment petite*.

Pour décrire ce cycle dans le sens positif, il faut faire varier ω depuis 0 jusqu'à 2π.

Or on a, en négligeant les infiniment petits et reprenant les nota-

tions du Chapitre précédent,

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tang}\omega}{a_1 + a_2 \operatorname{tang}\omega}.$$

X s'annule deux fois, car, quand ω varie depuis o jusqu'à 2π,

$$a_1 + a_2 \operatorname{tang}\omega$$

s'annule deux fois pour deux valeurs de ω que nous appellerons ω_0 et $\omega_0 + \pi$. Pour $\omega = \omega_0 - \varepsilon$, où ε est infiniment petit, on a

$$\operatorname{tang} = \omega \operatorname{tang}\omega_0 - \zeta,$$

ou ζ est positif et infiniment petit. On a donc

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tang}\omega_0 - b_2\zeta}{a_1 + a_2 \operatorname{tang}\omega_0 - a_2\zeta}.$$

Remarquons que $\operatorname{tang}\omega_0 = -\frac{a_1}{a_2}$; il viendra, en négligeant $b_2\zeta$ devant $b_1 + b_2 \operatorname{tang}\omega_0$,

$$\frac{Y}{X} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2} \frac{1}{\zeta}.$$

Donc, si $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, $\frac{Y}{X}$ pour $\omega = \omega_0$ et pour $\omega = \omega_0 + \pi$ saute de $-\infty$ à $+\infty$, on a

$$h = 2, \quad k = 0, \quad i = \frac{h-k}{2} = 1.$$

Si, au contraire, $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, $\frac{Y}{X}$ pour $\omega = \omega_0$ et pour $\omega = \omega_0 + \pi$ saute de $+\infty$ à $-\infty$, on a

$$h = 0, \quad k = 2, \quad i = \frac{h-k}{2} = -1.$$

Maintenant, quelle est la condition pour que

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0?$$

Reprenons l'équation (5) qui s'écrit

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0.$$

Il est évident qu'on aura

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0,$$

si les deux racines de l'équation sont imaginaires ou de même signe, c'est-à-dire si le point singulier est un nœud ou un foyer. On aura au contraire

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0,$$

si les deux racines sont réelles et de signe contraire, c'est-à-dire si le point singulier est un col.

Le théorème est donc démontré.

Problème I. — *Calculer l'indice d'un cycle situé tout entier dans l'un des hémisphères.*

Soient N le nombre des nœuds, F le nombre des foyers, C le nombre des cols contenus à l'intérieur du cycle.

Si l'on décompose le cycle donné en une infinité de cycles infiniment petits y,

Un nombre infini des cycles y	auront pour indice	0;
$N + F$ des cycles y	»	-1;
C des cycles y	»	$+1$.

L'indice du cycle donné sera donc

$$-(N + F - C).$$

Problème II. — *Calculer l'indice de l'équateur.*

Soient $2N'$ le nombre des nœuds, $2C'$ le nombre des cols situés sur l'équateur.

Soit $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\omega$.

Faisons varier ω depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\operatorname{tang}\omega$ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Tout étant symétrique par rapport au centre de la sphère, $\frac{Y}{X} = \frac{Y_2}{X_2}$ prend pour $\omega + \pi$ la même valeur que pour ω; quand on ferait varier ω depuis $+\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{3\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ repasserait par les mêmes valeurs que quand ω variait de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Donc, ω variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ sautera $\frac{h}{2}$ fois de $-\infty$ à $+\infty$, et $\frac{h}{2}$ fois de $+\infty$ à $-\infty$.

Ceci posé, si l'on considère l'expression

$$H = \frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x} = \frac{Y}{X} - \operatorname{tang}\omega,$$

pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$, on a

$$H = +\infty;$$

pour $\omega = +\frac{\pi}{2}$, on a

$$H = -\infty.$$

Soient λ le nombre de fois que H passe du négatif au positif, μ le nombre de fois que H passe du positif au négatif, on aura évidemment

$$\mu - \lambda = 1.$$

Or H peut passer du négatif au positif, soit par o, ce qui correspond à un col, soit par ∞, ce qui correspond à l'une des $\frac{h}{2}$ valeurs de ω, pour lesquelles $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$.

On a donc

$$\lambda = C' + \frac{h}{2}.$$

De même

$$\mu = N' + \frac{k}{2},$$

d'où

$$N' - C' = 1 + \frac{h-k}{2} = 1 + i,$$

d'où

$$i = N' - C' - 1.$$

Scolie. — Si le nombre des nœuds situés hors de l'équateur est $2N$, celui des foyers situés hors de l'équateur $2F$, celui des cols situés hors de l'équateur $2C$, celui des nœuds situés sur l'équateur $2N'$, celui des cols situés sur l'équateur $2E'$, on a la relation

$$N' + N + F = C + C' + 1.$$

En effet, pour obtenir ce résultat, il suffit d'égaler les deux valeurs de l'indice de l'équateur obtenues dans les deux problèmes précédents.

Corollaire I. — Le nombre total des nœuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus 2.

Corollaire II. — Le nombre total des points singuliers est un multiple de 4 plus 2.

Corollaire III. — Si le nombre des points singuliers se réduit à 2, ces points sont des nœuds et des foyers; ils sont toujours des nœuds s'ils sont sur l'équateur.

La courbe $X = 0$ et la courbe $Y = 0$ se composent d'un certain nombre de cycles. Considérons deux quelconques de ces cycles : ils se couperont en un nombre pair de points.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ les $2n$ points d'intersection de ces deux cycles rangés d'après l'ordre où on les rencontre en parcourant l'un des deux cycles, le cycle $X = 0$, par exemple, dans le sens positif.

THÉORÈME V. — *Supposons que deux points consécutifs α_k et α_{k+1} soient situés dans le même hémisphère; je dis que si α_k est un nœud ou un foyer, α_{k+1} est un col, ou réciproquement.*

Pour cela il suffit de faire voir que tout cycle qui enveloppe α_k et α_{k+1} a pour indice 0.

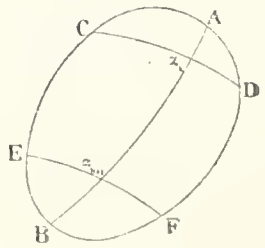
En effet, soit (*fig.* 3) AB l'arc du cycle $X = 0$, sur lequel se trouvent les points α_k et α_{k+1}; soient CD et EF les arcs du cycle $Y = 0$ qui viennent couper AB respectivement en α_k et α_{k+1}.

Il est évident que, pour le cycle ADFBECA,

$$h = 1, \quad k = 1, \quad i = \frac{h - k}{2} = 0.$$

Supposons, au contraire, que les points α_k et α_{k+1} soient dans deux hémisphères différents.

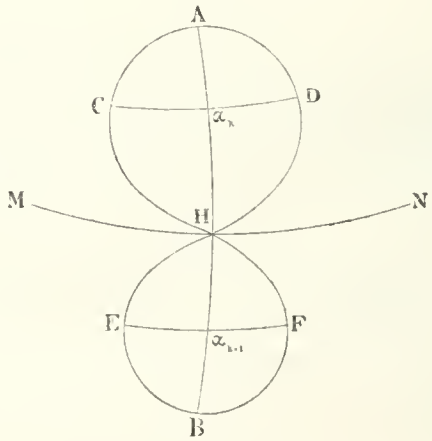
Fig. 3.



Je dis que si α_k est un col, α_{k+1} est un col, et que si α_k est un nœud ou un foyer, α_{k+1} est un nœud ou un foyer.

En effet, supposons que AB vienne couper l'équateur MN en H (*fig.* 4).

Fig. 4.



Considérons le cycle ACHFBEHDA. Ce cycle est parcouru *dans les deux hémisphères* dans le sens positif.

Supposons qu'en franchissant le point A, $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$; il en sera de même quand on franchira le point H ou le point B, c'est-à-dire que, si

$$\text{ind. ACHD} = 1, \quad \text{ind. ACHFBEHDA} = 2.$$

De même, si

$$\text{ind. ACHD} = -1, \quad \text{ind. ACHFBEHDA} = -2,$$

c'est-à-dire que, dans tous les cas,

$$\text{ind. ACHDA} = \text{ind. HFBEH}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Deuxième cas. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que X_2 et Y_2 étaient de même degré, sans que

$$xY_2 - yX_2$$

soit identiquement nul.

Nous n'avons pas examiné ce qui se passerait si nous avions identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

A un certain point de vue, le cas que nous avons étudié est plus général que celui que nous avons laissé de côté.

A un autre point de vue, c'est le contraire; car deux polynômes X et Y quelconques peuvent être considérés comme des cas particuliers des polynômes

$$X + \lambda xZ, \quad Y + \lambda yZ,$$

où λ est une constante et Z un polynôme de même degré que X et Y.

Nous allons donc supposer que l'on a identiquement

$$X_2 = xZ, \quad Y_2 = yZ,$$

où Z est une fonction homogène en x et y.

Dans ce cas, l'*équateur n'est plus une caractéristique*, et par conséquent les points singuliers de l'équateur peuvent être tout aussi bien des nœuds, des foyers et des cols.

La règle qui permettait dans le cas précédent de trouver l'indice de l'équateur se trouve en défaut; d'ailleurs, si l'équateur contient des points singuliers, les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

se coupent sur ce grand cercle, qui n'a par conséquent plus, à proprement parler, d'indice.

Supposons donc que l'équateur ne contienne pas de point singulier, et cherchons quel est l'indice de ce grand cercle.

Nous trouverons que l'on a le long de l'équateur

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x},$$

c'est-à-dire que l'indice de l'équateur sera égal à -1, et si l'on remarque qu'il est déjà égal à

$$(N + F - C),$$

$2N$, $2F$, $2C$ étant le nombre des nœuds, des foyers et des cols, on reconnaîtra que l'on a

$$F + N = C + 1,$$

c'est-à-dire que le théorème que l'on avait démontré dans le cas précédent est encore vrai.

Supposons maintenant que l'équation contienne des points singuliers, à savoir $2N'$ nœuds, $2F'$ foyers et $2C'$ cols, et voyons comment on pourra tourner la difficulté.

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ un grand cercle qui ne passe par aucun point singulier. Posons

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'},$$

où X' et Y' sont des polynômes entiers en x' et en y'.

On aura pu choisir le cercle $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, de telle façon que :

1° Aucune réduction ne s'opérant, X' et Y' soient de même degré ;

2° Que le grand cercle $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ne soit pas une caractéris-

tique, c'est-à-dire que les termes du degré le plus élevé de $y'X' - x'Y'$ se réduisent.

Si a, b est un point singulier de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

$$a' = \frac{a}{\alpha a + \beta b + \gamma}, \quad b' = \frac{b}{\alpha a + \beta b + \gamma}$$

sera aussi un point singulier de l'équation

$$\frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'}.$$

Si a, b est un nœud, un col ou un foyer, a', b' sera un nœud, un col ou un foyer, de sorte que les nombres des nœuds, des cols et des foyers sont $2(N + N')$, $2(C + C')$, $2(F + F')$ et que, se trouvant ramené au cas où l'équateur ne contenait pas de point singulier, on peut écrire

$$N + N' + F + F' = C + C' + 1.$$

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES CONTACTS.

L'étude que nous venons de faire des points singuliers va enfin nous permettre d'aborder la question des formes géométriques que peuvent affecter les caractéristiques *sur toute la surface de la sphère*.

Une première considération, d'une importance capitale, est celle du nombre des points où un arc ou un cycle donné touchent une caractéristique, c'est-à-dire du nombre des contacts de cet arc ou de ce cycle.

Le nombre des contacts d'un arc ou d'un cycle *algébriques* est toujours fini.

Remarques préliminaires. — On a vu qu'une courbe algébrique sans point double se compose d'un certain nombre de cycles; de même

une courbe algébrique à points doubles se compose d'un certain nombre de cycles et de polycycles. Or, ces polycycles eux-mêmes peuvent être considérés comme décomposables en un certain nombre de cycles se touchant aux points doubles et présentant en ces points des points anguleux.

Ainsi la courbe

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

se compose de deux polycycles diamétralement opposés; chacun de ces polycycles se compose de deux cycles qui se touchent au point

$$x = y = 0$$

et y présentent un point anguleux tel que l'axe des deux tangentes soit de 90°.

On a vu qu'une courbe algébrique C coupe un cycle algébrique quelconque en un nombre fini et pair de points. Ceci mérite quelques explications.

Si, en un point donné, la courbe algébrique C passe de l'intérieur du cycle à l'extérieur, ou réciproquement, nous dirons que la courbe *traverse* le cycle et ce point comptera pour un seul point d'intersection ou pour un nombre *impair* de points d'intersection confondus. Si, au contraire, dans le voisinage d'un point donné commun à la courbe C et au cycle, la courbe C reste tout entière extérieure ou intérieure au cycle, nous dirons que la courbe *touche* le cycle, et ce point comptera pour un nombre *pair* de points d'intersection confondus.

Supposons, par exemple, que le cycle donné présente un point anguleux à l'origine et que son équation s'écrive

$$0 = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \vartheta_3,$$

ϑ_3 étant un polynôme ne contenant que des termes de degré 3 et au-dessus.

Supposons qu'un point infiniment voisin de l'origine soit à l'intérieur du cycle donné toutes les fois que

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) > 0,$$

et à l'extérieur si

$$x < 0 \quad \text{ou si} \quad x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) < 0.$$

Soit

$$0 = y - mx + \delta_2,$$

l'équation de la courbe C, où δ_2 représente un polynôme, ne contenant que des termes de degré 2 et au-dessus.

Il est aisé de voir que la courbe C traverse le cycle toutes les fois que

$$(m - \lambda)(m - \mu) > 0$$

et le touche dans le cas contraire.

Théorème VI. — *Le nombre des contacts d'un cycle algébrique qui n'a pas de point anguleux, qui n'a pas de contact d'ordre supérieur avec une caractéristique et qui ne passe par aucun point singulier est toujours fini et pair.*

En effet, soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation de ce cycle, on trouvera ses contacts en cherchant son intersection avec la courbe

$$\varphi = X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} = 0.$$

Cette courbe étant algébrique, ses intersections avec le cycle donné sont en nombre pair, si l'on a soin de compter pour deux intersections les points où la courbe touche le cycle. Or, en ces points, le cycle aurait, avec une caractéristique, un contact d'ordre pair, ce que nous n'avons pas supposé. Donc, il n'y a nulle part plusieurs points d'intersection confondus des courbes

$$\varphi = 0, \quad F = 0.$$

Donc, le nombre des contacts est pair. C. Q. F. D.

Remarque I. — Le théorème est encore vrai quand même le cycle donné a des contacts d'ordre supérieur avec une caractéristique; à la condition toutefois que l'on ait soin de compter un contact d'ordre n pour n contacts.

Remarque II. — Supposons maintenant que le cycle algébrique offre un point anguleux. Supposons, pour fixer les idées, que ce point anguleux soit à l'origine, que l'équation du cycle s'écrive encore

$$0 = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_3$$

et que l'intérieur du cycle soit défini par les conditions

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) = 0.$$

Le polynôme φ s'écrit alors, si X_0 et Y_0 sont les valeurs de X et de Y pour $x = y = 0$,

$$\varphi = X_0[2\lambda\mu x - (\lambda + \mu)y] + Y_0[2y - (\lambda + \mu)x] + \theta'_2,$$

où θ'_2 est un polynôme ne contenant que des termes du degré 2 et au-dessus.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine à la courbe $\varphi = 0$ est alors

$$\frac{Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu}{2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)},$$

et la condition pour que la courbe $\varphi = 0$ traverse le cycle, c'est que

$$\begin{aligned} \alpha &= [Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu] - \lambda[2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)], \\ \beta &= [Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu] - \mu[2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)] \end{aligned}$$

soient de même signe.

Or, on peut écrire, en simplifiant,

$$\begin{aligned} \alpha &= (Y_0 - X_0\lambda)(\mu - \lambda), \\ \beta &= (Y_0 - X_0\mu)(\lambda - \mu); \end{aligned}$$

ce qui prouve que la condition pour que α et β soient de même signe,

c'est que $Y_0 - X_0\lambda$ et $Y_0 - X_0\mu$ soient de signe contraire, ou, en d'autres termes, que la condition pour que la courbe $\varphi = 0$ traverse le cycle donné est que la caractéristique qui passe par l'origine ne la traverse pas.

Donc, un point anguleux comptera pour un contact, si la caractéristique qui passe en ce point ne traverse pas le cycle, et pour deux contacts dans le cas contraire.

Remarque III. — Supposons maintenant que, le cycle passant toujours par l'origine, l'origine soit un point singulier. Soient

$$X = \alpha x + \beta y + \theta_2,$$
$$Y = \alpha' x + \beta' y + \theta'_2,$$

θ_2 et θ'_2 étant des polynômes dont les termes sont de degré 2 et au-dessus.

On aura

$$\varphi = (\alpha x + \beta y)\frac{dF}{dx} + (\alpha' x + \beta' y)\frac{dF}{dy} + \theta_2\frac{dF}{dx} + \theta'_2\frac{dF}{dy}.$$

La courbe $\varphi = 0$ passe par l'origine.

Si elle n'est pas tangente à la courbe $F = 0$, le point singulier devra compter pour un contact, mais si elle a avec le cycle $F = 0$ un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, le point singulier devra compter pour $n + 1$ contacts.

Or, pour qu'elle soit tangente à $F = 0$, il faut et il suffit que, si

$$\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{dF}{dy} = 0,$$
$$-\lambda(\alpha + \beta\lambda) + \alpha' + \beta'\lambda = 0,$$

c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que le cycle $F = 0$ soit tangent à une caractéristique, puisque le coefficient angulaire m de la tangente à une des caractéristiques passant par l'origine est donné par l'équation

$$-m(\alpha + \beta m) + \alpha' + \beta' m = 0.$$

On verrait de même que le cycle $F = 0$ aura, à l'origine, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec la courbe $\varphi = 0$, s'il a un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une des caractéristiques passant par l'origine.

Donc, un point singulier par où passe le cycle donné, mais qui n'est pas un point anguleux, comptera pour $n + 1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique.

Remarque IV. — Supposons enfin que l'origine soit un point singulier et un point anguleux du cycle donné.

Soient encore

$$\begin{aligned} X &= \alpha x + \beta y + \mathcal{G}_2, \\ Y &= \alpha' x + \beta' y + \mathcal{G}_2, \\ F &= (y - \lambda x)(y - \mu x) + \mathcal{G}_3, \end{aligned}$$

et à l'intérieur du cycle

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) > 0.$$

On aura

$$\begin{aligned} \varphi = {} & (\alpha x + \beta y)[2\lambda\mu x - (\lambda + \mu) y] \\ & + (\alpha' x + \beta' y)[2y - (\lambda + \mu) x] + \mathcal{G}'_3, \end{aligned}$$

$\mathcal{G}'_3$ étant un polynôme ne contenant que des termes du degré 3 et au-dessus.

La courbe $\varphi = 0$ présente donc à l'origine deux branches de courbe. L'origine comptera donc pour un nombre pair de contacts si ces deux branches touchent toutes deux ou traversent toutes deux le cycle, pour un nombre impair dans le cas contraire ; c'est-à-dire que, pour que l'origine doive être comptée pour un nombre impair de contacts, il faut et il suffit que les deux tangentes à l'origine à la courbe $\varphi = 0$ ne soient pas comprises toutes deux dans l'un des angles formés par les tangentes à l'origine à la courbe $F = 0$, c'est-à-dire qu'il faut et qu'il suffit que

$$\begin{aligned} \alpha = {} & [(\alpha' + \beta'\lambda)(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu(\alpha + \beta\lambda)] \\ & - \lambda[2(\alpha' + \beta'\lambda) - (\alpha + \beta\lambda)(\lambda + \mu)] \\ \beta = {} & [(\alpha' + \beta'\mu)(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu(\alpha + \beta\mu)] \\ & - \mu[2(\alpha' + \beta'\mu) - (\alpha' + \beta'\mu)(\lambda + \mu)] \end{aligned}$$

soient de signe contraire.

Or, on peut écrire, en simplifiant,

$$a = [(\alpha' + \beta'\lambda) - \lambda(\alpha + \beta\lambda)](\lambda - \mu)$$
$$b = [(\alpha' + \beta'\mu) - \mu(\alpha + \mu\mu)](\lambda - \mu)$$

Si le point singulier est un foyer, l'équation

$$(\alpha' + \mu'x) - x(\alpha + \mu x) = 0$$

n'a que des racines imaginaires. Son premier membre est donc toujours de même signe, a et b sont de signe contraire et le point singulier compte pour un nombre impair de contacts.

Si le point singulier est un col ou un nœud, il compte soit pour un nombre pair, soit pour un nombre impair de contacts, selon la position des tangentes à l'origine au cycle $F = 0$.

Résumé. — Le nombre des contacts d'un cycle algébrique est toujours pair à la condition :

1° Que l'on compte un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre pour n contacts ;

2° Qu'un point anguleux du cycle donné soit considéré comme un ou comme deux contacts, selon que la caractéristique qui y passe y touche ou y traverse le cycle ;

3° Qu'un point singulier compte pour $n + 1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique ;

4° Qu'un foyer qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un contact ;

5° Qu'un col ou un nœud qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un ou pour deux contacts, selon la position des tangentes au cycle au point anguleux.

Corollaire. — Si deux arcs algébriques ont mêmes extrémités, le nombre de leurs contacts peut être de même parité ou de parité différente si les deux extrémités ne sont pas deux foyers ; il est toujours de même parité si les deux extrémités sont deux foyers.

THÉORÈME VII. — *Si, entre deux points de la sphère, on peut mener*

un arc quelconque *sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc* algébrique *sans contact.*

En effet, soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

les équations de l'arc donné, où t est un paramètre convenablement choisi. On aura pu choisir le paramètre de telle sorte que les extrémités de l'arc correspondent à

$$t = 0, \quad t = \pi.$$

Si l'arc donné ne coupe pas l'équateur, x et y restent finis quant t varie de 0 à π; ce sont donc des fonctions finies et continues de t entre ces limites, et il en est de même de leurs dérivées.

Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les valeurs de x et de y pour $t = 0$ et pour $t = \pi$; les fonctions

$$x - x_1 \cos\frac{t}{2} - x_2 \sin\frac{t}{2},$$

$$y - y_1 \cos\frac{t}{2} - y^2 \sin\frac{t}{2}$$

sont nulles pour $t = 0$ et pour $t = \pi$.

Les fonctions x et y peuvent donc se développer en séries convergentes en $\sin mt$, de la manière suivante,

$$x = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sin mt + x_1 \cos\frac{t}{2} + x_2 \sin\frac{t}{2},$$

$$y = \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \sin mt + y_1 \cos\frac{t}{2} + y_2 \sin\frac{t}{2};$$

et l'on aura de même en séries convergentes

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{m=1}^{m=\infty} m A_m \cos mt - \frac{x_1}{2} \sin\frac{t}{2} + \frac{x_2}{2} \cos\frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{m=1}^{m=\infty} m B_m \cos mt - \frac{y_1}{2} \sin\frac{t}{2} + \frac{y_2}{2} \cos\frac{t}{2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs à la place de x, y $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ dans l'expression

$$X\frac{dy}{dt} - Y\frac{dx}{dt},$$

on aura une fonction de t qui, quand t variera de 0 à π, ne s'annulera pas et dont le carré restera par conséquent toujours plus grand qu'une quantité donnée ε^2.

Soient

$$A_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} A_m \sin mt + x_1 \cos\frac{t}{2} + x_2 \sin\frac{t}{2},$$

$$B_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} B_m \sin mt + y_1 \cos\frac{t}{2} + y_2 \sin\frac{t}{2}.$$

L'arc

$$x = A_\mu, \quad y = B_\mu$$

est algébrique et a les mêmes extrémités que l'arc donné.

De plus, on aura toujours pu prendre μ assez grand pour que A_μ, B_μ, $\frac{dA_\mu}{dt}$, $\frac{dB_\mu}{dt}$ diffèrent aussi peu que l'on veut de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, ou bien pour que $X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt}$, où x et y sont remplacés dans X et Y par A_μ et B_μ, diffère aussi peu que l'on veut de $X\frac{d\psi}{dt} - Y\frac{d\varphi}{dt}$, où x et y sont remplacés dans X et Y par φ et ψ; par exemple, pour que cette expression diffère de $X\frac{d\psi}{dt} - Y\frac{d\varphi}{dt}$ de moins de ε, pour que l'on ait toujours

$$X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt} > 0.$$

Dans ce cas, l'arc

$$x = A_\mu, \quad y = B_\mu$$

sera à la fois algébrique et sans contact. C. Q. F. D.

Si l'arc donné coupait l'équateur, mais ne coupait pas le grand cercle

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

on ferait un changement de variables en posant

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

et le théorème se démontrerait de la même manière.

Si l'arc donné coupait tous les grands cercles de la sphère, on le décomposerait en un certain nombre d'arcs secondaires dont aucun ne couperait tous les grands cercles de la sphère, et le théorème démontré successivement pour chacun de ces arcs secondaires le serait également pour l'arc total.

THÉORÈME VIII. — *Si* AB *est un arc algébrique sans contact, si* AA_1 *et* BB_1 *sont deux arcs de caractéristiques, on peut mener de* A_1 *à* B_1 *un arc sans contact.*

En effet, soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

les équations de l'arc AB où φ et ψ sont des fonctions continues de t, n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de t. Soient α et β les valeurs de t qui correspondent aux points A et B.

A chaque valeur de t correspond une caractéristique, et une seule, de telle sorte qu'à α et β correspondent les caractéristiques AA_1 et BB_1. Soient $t_0, t_1, t_2, \ldots$ les valeurs de t auxquelles correspondent des caractéristiques qui vont passer par un col.

Considérons la caractéristique qui correspond à une valeur donnée de t; soit s l'arc de cette caractéristique compté à partir du point où elle coupe l'arc AB. Les deux valeurs de s et de t déterminent un point de la sphère et forment pour ainsi dire un nouveau système de coordonnées. Soient

$$\begin{array}{lll} t = \alpha, & s = \gamma & \text{les coordonnées de } A_1, \\ t = \beta, & s = \delta & \text{les coordonnées de } B_1, \\ t = t_0, & s = s_0 & \text{les coordonnées des cols,} \\ t = t_1, & s = s_1, & \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Une équation

$$s = F(t),$$

où F est une fonction continue de t, qui ne prend qu'une valeur pour chaque valeur de t, représente un arc de courbe continu et sans contact, toutes les fois que t n'est égal ni à t_0, ni à t_1, ... et si $t < t_0$, par exemple, toutes les fois que $s < s_0$.

Or, on pourra toujours choisir F de telle sorte que,

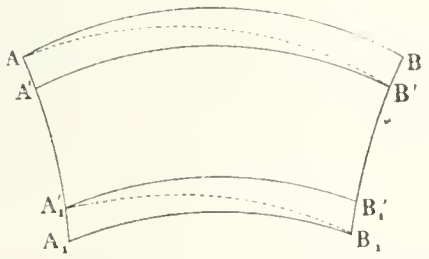
$$\begin{aligned} &\text{pour } t = \alpha, \quad F = \gamma, \\ &\text{pour } t = \beta, \quad F = \delta, \\ &\text{pour } t = t_0, \quad F < s_0, \\ &\text{pour } t = t_1, \quad F < s_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on peut mener de A_1 à B_1 un arc sans contact et par conséquent un arc algébrique sans contact. C. Q. F. D.

THÉORÈME IX. — *Si* AB *et* A_1B_1 (*fig.* 5) *sont deux caractéristiques, si* AA_1 *et* BB_1 *sont deux arcs algébriques qui ne coupent* AB *et* A_1B_1 *en aucun autre point que* A, B, A_1 *ou* B_1, *les nombres des contacts de* AA_1 *et de* BB_1 *sont de même parité.*

Soit A′ un point assez voisin de A pour que l'arc AA′ soit sans contact

Fig. 5.



et que la caractéristique A′B′ aille couper BB_1 en un point B′ tel que BB′ soit sans contact.

Supposons de même que $A'_1B'_1$ soit un arc caractéristique, et que $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ soient sans contact.

On pourra mener, d'après le théorème précédent, des arcs algébriques $AB'A'_1B_1$ sans contact.

Le nombre des contacts du cycle algébrique

$$AB'B_1A'_1A$$

doit être pair.

Or, les caractéristiques AB, A_1B_1 touchent le cycle en A et en B_1; les caractéristiques $A'B'$, et $A'_1B'_1$ le traversent en B' et en A'_1. Donc les quatre points anguleux comptent pour deux contacts. Donc on a

$$\text{nombre des contacts } AB' + \text{nombre des contacts } B'B_1$$
$$+ \text{nombre des contacts } B_1A'_1 + \text{nombre des contacts } A'_1A \equiv 0 \pmod{2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{nombre des contacts } AA_1 + \text{nombre des contacts } BB_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

C. Q. F. D.

Théorème X. — *Si un arc de caractéristique qui ne passe par aucun point singulier est sous-tendu par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.*

En effet, soit $F = 0$ l'équation de l'arc sous-tendant. Considérons la fonction F; cette fonction passe, par exemple, du positif au négatif quand le point (x, y), décrivant la caractéristique, passe par l'une des extrémités de l'arc sous-tendant, et du négatif au positif quand il passe par l'autre extrémité de cet arc. C'est dire que, quand le point (x, y) décrit l'arc donné de caractéristique, la fonction F passe par un nombre impair de maxima et de minima.

Or, ces maxima et ces minima sont donnés par l'équation

$$\varphi = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0;$$

c'est dire que l'arc de caractéristique coupe en un nombre impair de points la courbe $\varphi = 0$.

Or, cette courbe, qui est algébrique, coupe en un nombre pair de points le cycle H formé par l'arc de caractéristique et l'arc sous-tendant; donc elle coupe l'arc sous-tendant en un nombre impair de points.

Donc le nombre des contacts de cet arc est impair.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Si l'arc de caractéristique passe par un col, comment faudra-il modifier le théorème?

Le col appartient évidemment à la courbe $\varphi = 0$, mais il n'est un maximum ou un minimum de F qu'à la condition que l'arc de caractéristique présente en ce point un point anguleux.

En effet, supposons d'abord qu'il n'y ait pas de point anguleux. Les courbes $F = 0$ et $\varphi = 0$ traverseront toutes deux, en général, le cycle H, c'est-à-dire que le col sera un point simple d'intersection du cycle et de $\varphi = 0$, sans correspondre à un maximum ou à un minimum de F.

Si, au contraire, il y a un point anguleux, l'une des courbes $\varphi = 0$, $F = 0$ traversera le cycle H, pendant que l'autre le touchera, de telle sorte que, ou bien le col sera un point simple d'intersection de H et de $\varphi = 0$, et en même temps un maximum de F, ou bien il sera un point double de H et de $\varphi = 0$ sans être un maximum de F.

Donc, si l'arc de caractéristique passe par un col et n'y a pas de point anguleux, le nombre des contacts de l'arc sous-tendant est pair.

Si l'arc de caractéristique passe par un col et y a un point anguleux, le nombre de ces contacts est impair.

Remarque II. — On démontrerait de même que, si un arc de caractéristique ne passe par aucun point singulier, tout arc de courbe qui le sur-tend a un nombre de contacts pair.

Contacts des systèmes topographiques. — Si l'on considère un système topographique algébrique, les contacts de ce système formeront une courbe algébrique.

On distinguera les contacts intérieurs et extérieurs du système topographique, selon que dans le voisinage de ces contacts la caractéristique qui y passe reste intérieure ou extérieure au cycle qu'elle touche, parmi ceux du système topographique.

La courbe des contacts sera donc divisée en un certain nombre d'arcs qui seront les arcs des contacts intérieurs et ceux des contacts extérieurs

Ces arcs seront séparés :

1° Par les points singuliers ;

2° Par les points où la courbe des contacts touche un des cycles du système topographique.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME VII.

Pages.

Exposé des méthodes générales en Mathématiques; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Hoené Wronski; par M. *Emile West* 5

Sur quelques théorèmes de Mécanique; par M. *H. Resal* 33

Applications mécaniques du Calcul des quaternions; par M. *Genty* 49

Sur les surfaces osculatrices; par le *P. Pépin* 71

Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite; par le *Rédacteur*. 109

Digression sur les séries; par M. *Emile West* 111

Recherches sur l'Électrodynamique; par M. *H. Resal* 129

Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles, et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique; par M. *J. Boussinesq* 147

Le dévioscope, appareil donnant directement le rapport qui existe entre la vitesse angulaire de la Terre et celle d'un horizon quelconque autour de la verticale du lieu; par M. *G. Sire* 161

Sur les permutations alternées; par M. *Désiré André* 167

Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle; par M. *H. Léauté* 185

Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy; par M. *Emile Mathieu* 201

Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, un action maximum; par M. *E. Brassinne*. 215

De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation; par M. *Emile Mathieu*. 219

Pages.

Sur quelques questions concernant les forces centrales; par M. *Edouard Combescure* 239

Sur le développement des fonctions implicites en une série; par M. *F. Gomes Teixeira* 277

Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables; par M. *Désiré André* 283

De la propagation verticale des ondes dans les liquides; par M. *P.-A. Cornaglia* 289

Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité; par M. *H. Resal.* 341

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle; par M. *H. Poincaré* 375

Table des Matières 423

FIN DU TOME VII DE LA TROISIÈME SÉRIE.

6584 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

ERRATA.

Page 10, ligne 18, *au lieu de* $\aleph_\alpha = 0$, *lisez* $\aleph_\alpha = 1$.

Page 12, ligne 3, *au lieu de* fonction négative aleph μ, *lisez* fonction négative aleph m.

Page 13, ligne 12, *au lieu de* $(a_1 + \ldots)$, *lisez* $(a_1 + \ldots)^m$.

» ligne 4 en remontant, *au lieu de* $(-1)^{n-1}$, *lisez* $(-1)^n$.

Page 15, ligne 8, au dénominateur, *au lieu de* $[d\varphi(w)]^2$, *lisez* $[d\varphi(w)]^3$.

» ligne 10, au numérateur, *au lieu de* $d^3[\varphi(w)]^1$, *lisez* $d^3[\varphi(w)]^2$.

» » *au lieu de* $d\varphi(w)$, *lisez* $d(w)$.

» ligne 7 en remontant, *au lieu de* $F(x)$, *lisez* $F(y)$.

» ligne 5 en remontant, *ajoutez* le facteur $[\varphi(w)]^3$ à la fin de la fraction.

Page 17, ligne 13, *au lieu de* w, *lisez* $\varphi(w)$.

Page 20, ligne 12, *remplacez le terme* $d^{\alpha-1}F(u)$ par des points.

Page 28, ligne 2 en remontant, au numérateur, *au lieu de* $\operatorname{tang} a$, *lisez* $\operatorname{tang}\alpha$.

Page 30, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $1 - \operatorname{tang}\alpha \dfrac{n\aleph \sin\psi}{\sqrt{1 + n^2\aleph^2 \sin^2\psi}} + \ldots$

lisez $1 + \operatorname{tang}\alpha \dfrac{n\aleph \sin\psi}{\sqrt{1 + n^2\aleph^2 \sin^2\psi}} + \ldots$

Même page, ligne 1 en remontant, *remplacez* le numérateur par $nq - \operatorname{tang}\alpha$.

Page 31, ligne 2, *au lieu de* $(\operatorname{tang}\alpha - n\aleph \sin\psi)\Omega$, *lisez* $n^2q^2(\operatorname{tang}\alpha - n\aleph \sin\psi)\Omega$.

» ligne 3, *au lieu de* $(1 - \Phi nq) + \ldots$ *lisez* $(1 - \Phi nq)(1 - \aleph) + \ldots$

» ligne 6, *au lieu de* $\dfrac{n}{m}$, *lisez* $\dfrac{m}{n}$.

Page 128, formule ($\alpha\alpha$), entre crochets, *au lieu de* $[1 - \ldots$, *lisez* $[1 - \ldots$

» formule ($\alpha\beta$), entre la première accolade et le premier crochet, *au lieu de* $- \ldots$, *lisez* $- \dfrac{1}{\ldots} \ldots$

6584 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.3
t.7
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY